

Medición de la desigualdad y el bienestar social. Análisis de la distribución de la renta en España. (1981-1991)¹

**A. Fernández Morales,
J. de Haro García,
G. Martín Reyes**
Universidad de Málaga

BIBLID [0213-7585 (1996); 45; 15-42].

RESUMEN

En este trabajo se profundiza en los instrumentos para la medición de la desigualdad y del bienestar social. Además de utilizar los instrumentos tradicionales se introducen otros novedosos en las aplicaciones realizadas en España.

Se analiza la evolución sufrida por la desigualdad y el bienestar social en la distribución de los ingresos en España, y por Comunidades Autónomas de 1980-81 a 1990-91, empleando el modelo de distribución de renta Dagum I (1977). Entendiendo por bienestar social, en este contexto, aquel que viene determinado por el ingreso medio de la distribución y una medida de desigualdad.

1. INTRODUCCIÓN

En los últimos tiempos se está despertando un renovado interés por la investigación sobre pobreza y desigualdad. Los estudios sobre crecimiento económico están siendo complementados con análisis sobre bienestar económico y equidad distributiva por parte de organismos internacionales pertenecientes a la ONU, CEE y el Banco Mundial, entre otros. Todo ello contribuye a que también en España se fomente el estudio de tales temas.

1. El presente artículo está basado en la tesis doctoral "Medición de la Desigualdad y el Bienestar Social. Análisis de la Distribución de la Renta en España. (1981-1991)." Esta tesis forma parte del programa de investigación del grupo de investigación de Economía Cuantitativa del Bienestar Social (E.C.B.) de la Universidad de Málaga, y en particular en el proyecto DGICYT nº PS93-0144.

Desde nuestro punto de vista el profundizar en los instrumentos necesarios para la medición de la desigualdad y el bienestar social nos parece de crucial importancia. Así en este trabajo además de emplear los instrumentos tradicionales se introducen otros novedosos en las aplicaciones realizadas en España.

Analizaremos la evolución sufrida por la desigualdad y el bienestar social en la distribución de los ingresos en España, y por Comunidades Autónomas de 1980-81 a 1990-91, empleando el modelo de distribución de renta Dagum I (1977). Entendiendo por bienestar social, en este contexto, aquel que viene determinado por el ingreso medio de la distribución y una medida de desigualdad.

Utilizaremos medidas tanto de ordenación completa como de ordenación parcial. Las primeras son aquellas que permiten ordenar todas las distribuciones de renta comparadas según su grado de desigualdad o de bienestar social. Las medidas de ordenación parcial o criterios gráficos no siempre permiten ordenaciones de todas las distribuciones, por ejemplo, en casos de cruces de las mismas.

La cuantificación de la desigualdad se realiza en primer lugar a través de dos instrumentos de ordenación completa: los índices de Gini y Zenga (1984).

Los criterios de ordenación parcial utilizados son la curva de Lorenz, $L(p)$, así como dos instrumentos de alto poder descriptivo y explicativos de la desigualdad: la curva de densidad de Lorenz, $l(p)$, que aportamos como medida de desigualdad complementaria de las ya existentes, y la curva de Zenga, $Z(p)$, (Zenga, 1984).

La curva de densidad de Lorenz, $l(p)$, es la pendiente de la curva de Lorenz. Es éste un instrumento de fácil obtención pero no por ello deja de ser complementario de las medidas tradicionales. Esto unido a su fácil interpretación, nos ha llevado a utilizarlo como medida de ordenación parcial. La curva de Zenga, $Z(p)$, por su parte, se debe al profesor Michele Zenga de la Escuela italiana, pionera en el tema de la medición de la desigualdad en la distribución de la renta, y fue aplicada por primera vez en 1984, siendo una curva de gran poder descriptivo de la desigualdad por tramos de renta. Ambas curvas muestran la contribución de cada percentil a la desigualdad total. Sin embargo, cada una lo hace de diferente forma.

Igualmente, se utiliza la curva de Lorenz generalizada, $GL(p)$, medida a través de la cual se lleva a cabo la medición del bienestar asociado a la distribución de la renta, en los casos en que sea preciso.

Finalmente, ponemos de manifiesto que para estudiar la desigualdad de una distribución de renta no se puede utilizar un único instrumento.

Son necesarios tanto métodos gráficos, como medidas sintéticas y cómo no la renta media de la distribución para concluir en términos de bienestar social.

2. ESTIMACIÓN DE UN MODELO DE DISTRIBUCIÓN DE RENTA

La publicación realizada por el Instituto Nacional de Estadística (I.N.E.) de la Encuesta de Presupuestos Familiares (E.P.F.) 1990-1991 nos ha permitido realizar un estudio comparativo de la distribución territorial de la desigualdad por Comunidades Autónomas con respecto a los datos de la Encuesta de Presupuestos Familiares 1980-1981.

Utilizaremos la desigualdad de la renta o ingreso ($x > 0$) como indicador de la desigualdad en el bienestar económico². Por otro lado, las unidades objeto de estudio serán los hogares. La E.P.F. define los ingresos del hogar como la suma de todos los ingresos monetarios o no, netos de impuestos y de otros pagos asimilados, percibidos por cada uno de los miembros del hogar con independencia de que sean o no destinados total o parcialmente a la constitución de un fondo común para atender a los gastos del hogar. La distribución de los ingresos anuales de los hogares, agrupados en decilas, correspondientes a la E.P.F. de 1980-81 y 1990-91 serán la base de nuestro estudio³.

Medir la desigualdad a través de los ingresos de los hogares parece acertado si tenemos en cuenta que las desigualdades dentro de una Comunidad son más bien debidas a la disparidad de los ingresos percibidos que por el destino final de los mismos⁴.

El ajuste de funciones continuas a los datos discretos de la función de distribución es un método muy utilizado en los estudios de desigualdad económica. De esta forma se simplifica el cálculo de indicadores de desigualdad y pobreza. Además de poder aplicar la misma metodología

2. No queremos entrar en la ya tradicional polémica de si utilizar la variable renta o gasto. En Ruiz-Castillo (1987) se aborda tal cuestión con criterios tanto a favor como en contra de ambas variables.
3. Nos referiremos en adelante a los ingresos de la E.P.F. de 1980-81, simplemente, como los correspondientes a 1981, igualmente, los de 1990-91 como simplemente de 1991. Al comparar se suponen que son dos años en cuestión pero como sabemos la E.P.F. posee un ámbito temporal de abril de 1980 a marzo de 1981, e igualmente para la de 1990-91, con lo que nos resulta más cómodo el globalizar ese ámbito denominando un sólo año.
4. En López Menéndez (1991) se justifica igualmente el uso del ingreso por hogar como variable de estudio. De igual forma, se justifica el no uso de escalas de equivalencias debido a la limitación que la E.P.F. posee en este sentido, ya que sería necesario saber la estructura por tamaños de cada hogar que constituye la muestra, requisito que en la E.P.F. se cumple en niveles de mayor agregación.

en un análisis temporal, ya que poseer toda la información discreta de las muestras detallada a lo largo de los años y conseguir un tratamiento homogéneo no resulta tan fácil. Lo usual es disponer de información agrupada en las publicaciones oficiales. Para evitar el error de agrupamiento cuando se trabaja con datos agrupados resulta conveniente aplicar una función continua para el cálculo de medidas de desigualdad.

Las primeras funciones que se propusieron como candidatas para describir la distribución de la renta, fueron la de Pareto y la lognormal. Sin embargo, los ajustes que proporcionan no son muy buenos prefiriéndose la función de Pareto para las colas altas de la distribución, y la lognormal para los tramos medios. En Dagum (1980), aparecen las expresiones de curvas de Lorenz asociadas a distribuciones de renta como, exponencial, Sing-Maddala, Dagum tipo I⁵.

TABLA 2.1
PARÁMETROS ESTIMADOS DEL MODELO DAGUM I (1981)

CC.AA.	β	δ	λ	SCE	K
ANDALUCÍA	1.15597	2.45735	13762.1	.002048	.03346
ARAGÓN	1.15985	2.42497	17903.0	.004103	.03043
ASTURIAS	1.30843	2.46428	22235.7	.006869	.04127
BALEARES	1.20639	2.46428	20452.8	.002358	.02637
CANARIAS	1.34175	2.51021	18078.2	.002914	.02948
CANTABRIA	1.66981	2.56573	28663.8	.002418	.03004
CAST y LEÓN	1.02836	2.39353	14827.4	.002054	.03149
C-LA MANCHA	1.18753	2.50318	11344.7	.002006	.02739
CATALUÑA	1.84128	2.57098	33606.5	.005364	.04484
C.VALENCIANA	1.56409	2.55177	21909.9	.001858	.02469
EXTREMADURA	1.25051	2.56379	9484.9	.001188	.02421
GALICIA	1.18413	2.45744	17494.3	.001955	.03195
MADRID	1.46311	2.48788	33510.2	.001887	.03299
MURCIA	1.49615	2.55226	16626.9	.002355	.02621
NAVARRA	1.74559	2.53837	33119.8	.006689	.05102
PAÍS VASCO	2.66146	2.68054	39149.2	.004957	.05676
RIOJA	1.91253	2.62041	25752.5	.005712	.05450
ESPAÑA	1.19266	2.43788	19985.6	.002583	.02902

Fuente: *Elaboración propia.*

5. De igual forma, en Haro García (1992) aparecen las expresiones de la curva de Lorenz ajustada a los modelos biparamétricos de Fisk (1961) y Gamma (Salem y Mount (1974)).

En nuestro trabajo se ha aplicado el modelo triparamétrico de Dagum, también llamado Dagum tipo I (1977)⁶ por ser un modelo que consigue buenos ajustes en todo el rango de la distribución. Su expresión es la siguiente,

$$F(x) = (1 + \lambda x^{-\delta})^{-\beta}, \beta, \lambda, \delta > 0 \quad (1)$$

En la tabla 2.1 aparecen los parámetros del modelo de Dagum correspondientes al año 1981 estimados a través del programa EPID que nos proporciona el autor. En la tabla 2.2 aparecen los correspondientes a 1991. Este programa calcula los parámetros de su modelo usando el método no lineal de mínimos cuadrados y aplicando un algoritmo (Birta, 1978) que busca la minimización de la suma de los cuadrados de las desviaciones de las funciones de distribución observadas de la estimadas.

TABLA 2.2
PARÁMETROS ESTIMADOS DEL MODELO DAGUM I (1991).

CC.AA.	β	δ	λ	SCE	K
ANDALUCÍA	1.50470	2.43633	134475.6	.001601	.0254
ARAGÓN	1.48994	2.41921	165549.9	.004728	.04465
ASTURIAS	2.78944	2.56996	215125.7	.008601	.05900
BALEARES	1.56354	2.41936	210833.8	.005641	.04940
CANARIAS	1.31361	2.39394	144101.8	.00504	.01874
CANTABRIA	2.03275	2.49520	222626.3	.006298	.05930
CAST y LEÓN	1.34467	2.39429	144432.7	.002416	.02872
C-LA MANCHA	1.35258	2.42387	122597.5	.001161	.02095
CATALUÑA	1.66248	2.43989	254410.6	.001964	.02501
C.VALENCIANA	1.74472	2.46509	165245.7	.003050	.03470
EXTREMADURA	1.36394	2.43377	93049.8	.002413	.03000
GALICIA	1.58373	2.43650	171884.9	.003331	.03695
MADRID	2.57429	2.55595	333874.6	.002434	.03115
MURCIA	1.56404	2.45325	145649.0	.00612	.01733
NAVARRA	2.75584	2.57117	308861.9	.003305	.03439
PAÍS VASCO	2.06620	2.48930	270611.1	.003956	.03853
RIOJA	1.65555	2.45877	271043.4	.001183	.02092
ESPAÑA	1.49102	2.41465	179381.7	.002553	.02967

Fuente: Elaboración propia.

6. En España, Delgado Cabeza (1988), en una aplicación pionera del modelo de Dagum, emplea el modelo tipo III de cuatro parámetros para el estudio de la distribución de la renta en España por CC.AA. a partir de los datos de ingresos de la E.P.F. para los años 1973-74 y 1980-81.

Los resultados de la Suma de Cuadrados de Errores Acumulados (SCE) y los valores observados del estadístico de Kolmogorov (K) se exponen en ambas tablas⁷. Ambos son indicadores de los buenos ajustes conseguidos.

3. LA DESIGUALDAD A TRAVÉS DE CRITERIOS DE ORDENACIÓN COMPLETA

La forma de medir la desigualdad que proporciona ordenaciones completas al comparar una distribución, como es nuestro caso, de un año con respecto a otro se realiza a través de indicadores sintéticos como los índices de desigualdad. De esta forma se evita el inconveniente que poseen los criterios gráficos de posibles cruces de curvas. Si bien como apunta Salvaterra (1987) "analizar la desigualdad basándonos en un sólo número es algo arriesgado".

En este trabajo obtendremos los índices de desigualdad de Gini, G , (derivado de la curva de Lorenz, $L(p)$), y de Zenga, ξ , (derivado de la curva de concentración de Zenga, $Z(p)$). El índice de Gini es ya clásico en los estudios de desigualdad⁸, en cambio el índice de Zenga es muy reciente, y a continuación es desarrollado a partir de la curva de Zenga.

Zenga propuso en 1984 la curva de concentración $Z(p)$, definida de la siguiente forma:

$$Z(p) = (x_p^* - x_p) / x_p^*$$

La definición establece la diferencia entre los cuantiles de renta, x_p^* , y cuantiles de población x_p como funciones de p e indica la contribución de cada $p\%$ de los individuos de menores ingresos a la desigualdad total de la distribución, siendo la desigualdad mayor cuanto mayor es la diferencia entre el cuantil de renta, $x^*(p)$ y el de población, $x(p)$.

El índice de Zenga, ξ , asociado a la curva $Z(p)$ viene definido por la siguiente expresión:

$$\xi = \int_0^1 Z(p) dp = E(Z(p)) \quad 0 \leq p \leq 1 \quad (2)$$

7. A un nivel de significación del 5%, el contraste de Kolmogorov-Smirnov nos lleva a aceptar la hipótesis nula de que el modelo de Dagum (I) se ajusta bien a la función de distribución observada. Por otro lado, las SCE, dan fe del buen ajuste conseguido en todas las Comunidades.
8. Ver Chakravarty (1990).

Este índice nos da el área bajo la curva $Z(p)$. Es un índice normalizado ya que el ratio de la curva de Zenga también lo es. Para $\xi=0$, $Z(p)=0$, esto es, existe concentración nula. Para $\xi=1$, $Z(p)=1$, existe máxima desigualdad. Con respecto a la propiedad de Lorenz Consistencia (que ordene las distribuciones de igual forma que la curva de Lorenz) no siempre la cumple, depende de la forma que adopte la curva $Z(p)$.

Los indicadores de Gini y Zenga analizados son los únicos que incorporan el Principio de Comparaciones Interpersonales al depender, además de la variable renta de sus funciones de distribución⁹.

Las expresiones utilizadas para su estimación han sido derivadas del modelo Dagum I, de forma que se basan, fundamentalmente, en la función de distribución, $F(x)$, y la curva de Lorenz, $L(x)$ de dicho modelo¹⁰.

$$G=E[(x/\mu)F(x)-L(x)] \quad (3)$$

$$\xi=E[Z(p)] \quad (4)$$

Los resultados de la estimación para cada Comunidad aparecen detallados en la tabla 3.1.

El índice de Zenga, ξ , puede representarse gráficamente a través de las líneas paralelas al eje de abscisas, según se recoge en los gráficos de las curvas $Z(p)$ del anexo¹¹. De forma que, cuanto más alejada se encuentre esa línea de tal eje mayor desigualdad existe, y viceversa. Del mismo modo, como el índice de Zenga recoge la desigualdad media de la distribución, la diferencia de éste con respecto a la curva $Z(p)$, indica qué decilas contribuyen más o menos a aumentar o disminuir la desigualdad. Se observa, por regla general, como las capas de mayor renta son las que poseen su tramo de $Z(p)$ por encima de la línea del índice lo que supone que son los tramos que más contribuyen a aumentar la desigualdad.

9. En Haro García (1995) se realiza una estimación para el año 1991 de las funciones de utilidad y desutilidad para el modelo de distribución de renta Dagum Tipo I (1977), realizándose un amplio estudio de las razones que nos han llevado a seleccionar el índice de Gini y de Zenga. En tal trabajo se demuestra como los índices de Theil, entropía generalizado y los dos de Atkinson analizados, los cuales tradicionalmente han sido seleccionados por cumplir con el Principio de Transferencias Decrecientes (Chakravarty, 1990), cumplen con tal principio a un alto precio, tales son las anomalías que en ciertos tramos de la distribución se producen al representar sus funciones de utilidad y desutilidad, sin tener en ocasiones sentido económico.

10. Ver Dagum (1993).

11. En las gráficas de curvas de Zenga, los índices de Zenga, ξ , correspondientes a 1981 y 1991 vienen representados como $I(1981)$ e $I(1991)$, respectivamente.

En todas las estimaciones realizadas (tablas 2.1 y 2.2), al ser $\beta\delta > 1$ todas las distribuciones analizadas son unimodales; igualmente se comprueba como las Comunidades donde la desigualdad ha sido menor, el producto $\beta\delta$ es mayor, (en el modelo de Dagum se comprueba que si $\beta \rightarrow 0$, $G \rightarrow 1$ y cuando $\beta \rightarrow \infty$, $G \rightarrow 0$; de igual forma, cuando $\delta \rightarrow 1$, $G \rightarrow 1$ y si $\delta \rightarrow \infty$, $G \rightarrow 0$). En la tabla 2.2 se observa que la Comunidad de Canarias es la que posee los parámetros β (1.31) y δ (2.39) menores de España para 1991, y se comprueba en la tabla 3.1, como para el mismo año, obtiene el mayor índice de Gini (0.3986).

TABLA 3.1
ÍNDICES DE DESIGUALDAD (1981-1991)

CC.AA.	G(1981)	G(1991)	ξ (1981)	ξ (1991)
ANDALUCÍA	0.3963	0.3836	0.4314	0.4092
ARAGÓN	0.4015	0.3870	0.4404	0.4147
ASTURIAS	0.3871	0.3381	0.4154	0.3323
BALEARES	0.3923	0.3844	0.4245	0.4102
CANARIAS	0.3783	0.3986	0.4004	0.4349
CANTABRIA	0.3587	0.3601	0.3647	0.3689
CAST Y LEÓN	0.4156	0.3972	0.4662	0.4322
C-LA MANCHA	0.3871	0.3918	0.4157	0.4232
CATALUÑA	0.3528	0.3779	0.3561	0.3989
C.VALENCIANA	0.3634	0.3715	0.3737	0.3881
EXTREMADURA	0.3744	0.3896	0.3927	0.4194
GALICIA	0.3946	0.3809	0.4287	0.4044
MADRID	0.3768	0.3425	0.3976	0.3392
MURCIA	0.3656	0.3788	0.3774	0.4009
NAVARRA	0.3601	0.3383	0.3679	0.3326
PAÍS VASCO	0.3243	0.3604	0.3094	0.3694
RIOJA	0.3441	0.3750	0.3419	0.3941
ESPAÑA	0.3974	0.3877	0.4334	0.4160

Fuente: Elaboración propia.

Por contra, las Comunidades de Asturias y Navarra en 1991 poseen los β y δ mayores de España, β (2.78 para Asturias y 2.75 para Navarra), así como δ (2.569 para Asturias y 2.571 para Navarra) lo que hace que posean los Ginis más bajos de España, casi iguales, (0.3381 Asturias y 0.3383 Navarra). Igual comportamiento de β y δ se cumple con el índice de Zenga, en 1981 y 1991.

Los dos índices dan idénticas ordenaciones de la desigualdad en cada Comunidad al analizar el período 1981-1991. Las Comunidades donde ha disminuido la desigualdad son: Andalucía, Aragón, Asturias, Baleares, Castilla y León, Galicia, Madrid y Navarra. En el resto de las Comunidades ha aumentado la desigualdad.

Las Comunidades que han visto reducir la desigualdad en mayor medida son Asturias y Madrid. Por contra, País Vasco y La Rioja son las Comunidades con mayor aumento de la desigualdad.

Aunque en el conjunto nacional disminuye la desigualdad, prácticamente en la mitad de las CC.AA. aumenta la desigualdad de 1981 a 1991. Los índices de Gini y Zenga obtenidos para el conjunto nacional son elevados en comparación con lo que sería la media de los índices por CC.AA. Tal circunstancia se debe a que, por regla general, las Comunidades con los índices más bajos poseen rentas medias elevadas y mejor distribuidas, por ejemplo, Madrid, Navarra o Cataluña, y CC.AA. con los índices más elevados como Castilla y León, Andalucía o Extremadura poseen rentas medias más bajas y peor repartidas. Esto hace que en el conjunto nacional los índices recojan esa gran disparidad entre las CC.AA.

En líneas generales se puede afirmar que *la desigualdad ha disminuido en España, aunque sea en poca medida, si bien el nivel de desigualdad es elevado*. Según el índice de Gini la disminución es del 2,45%, según el de Zenga del 4,02%.

A través de los criterios de ordenación parcial profundizaremos más en la comparación de la desigualdad en el período considerado. Esta labor se facilita al ver lo ocurrido por tramos de renta.

4. LA DESIGUALDAD A TRAVÉS DE CRITERIOS DE ORDENACIÓN PARCIAL

Los criterios de ordenación parcial son criterios gráficos de gran utilidad a la hora de describir la desigualdad de una distribución. La curva de Lorenz ha sido tradicionalmente el instrumento más utilizado, sin embargo, en los últimos tiempos un conjunto de autores italianos entre los que destacamos Pollastri (1987), Dancelli (1989, 1990), Salvaterra (1985, 1987, 1990) enfatizan el análisis de la desigualdad a través de la curva de concentración, $Z(p)$, a la que ya hemos hecho referencia.

A partir del modelo Dagum I, se han calculado las expresiones correspondientes a la curva de Lorenz, $L(p)$, curva de densidad de Lorenz, $l(p)$, curva $Z(p)$, y curva de Lorenz generalizada, $GL(p)$, que son los instrumentos gráficos que se van a utilizar en este trabajo.

4.1. Curva de Lorenz

La curva de Lorenz asociada al modelo Dagum I (1977) en su forma $L(F)$ tiene la siguiente expresión (Dagum, 1993),

$$L(F) = B(F^{1/\beta}, \beta+1/\delta, 1-1/\delta) / B(\beta+1/\delta, 1-1/\delta), \quad (5)$$

donde $B(\beta+1/\delta, 1-1/\delta)$ es la función beta y $B(F^{1/\beta}, \beta+1/\delta, 1-1/\delta)$ es la función de distribución beta acumulada de la variable $F^{1/\beta}$.

Con el objeto de estudiar la evolución de la desigualdad entre 1981 y 1991, en el anexo aparecen representadas las curvas de Lorenz de algunas Comunidades Autónomas y para el conjunto de España correspondientes a ambos años que nos servirán como ilustración¹².

La tónica general observada es la gran proximidad entre las curvas de 1981 a 1991, clasificándose las Comunidades Autónomas en tres grupos:

Un primer grupo formado por Andalucía (anexo, gráfico 1), Aragón, Asturias, Baleares, Castilla y León, Galicia, Madrid (anexo, gráfico 4) y Navarra. En todas ellas se ha producido una *disminución de la desigualdad* o lo que es igual la distribución de 1991 domina según Lorenz a la de 1981.

Al analizar la primera decila de las diferentes CC.AA. destacan Asturias, Navarra y Madrid como las Comunidades donde más ha disminuido la desigualdad en tal tramo. Resulta de interés comprobar como en tales Comunidades las disminuciones de desigualdad, según se vio a través de los índices de desigualdad, son las mayores de España.

Un segundo grupo lo constituyen aquellas Comunidades donde la *desigualdad ha aumentado*, tales como Canarias, Cataluña, Comunidad Valenciana, Extremadura, Murcia, País Vasco (anexo, gráfico 7) y La Rioja. La distribución de 1981 domina según Lorenz a la de 1991. Las Comunidades del País Vasco y La Rioja son las CC.AA. donde más aumenta la desigualdad de 1981 a 1991. Si se analiza la primera decila de todas las CC.AA. donde aumenta la desigualdad para el período considerado, se observa como el País Vasco y La Rioja poseen los aumentos mayores.

El tercer grupo lo forman Cantabria (anexo, gráfico 10) y Castilla-La Mancha donde no se pueden establecer dominancias ya que sus curvas de Lorenz se *cruzan* de un año para otro. Estos son casos en los que las curvas de Lorenz, $L(p)$, no dan una ordenación total.

12. El resto de curvas de Lorenz estimadas pueden verse en Haro García (1995). Para estas representaciones gráficas se han empleado la función beta y la distribución beta del software MATLAB.

Si trasladamos este estudio a nivel nacional, encontramos que la *desigualdad ha disminuido de forma general en España* (anexo, gráfico 13). *Si bien la desigualdad de 1981 a 1991 disminuye muy levemente.*

4.2. Curvas $I(p)$ Y $Z(p)$.

Veamos la utilidad que la curva de densidad de Lorenz, $I(p)$, y la curva $Z(p)$ reportan en la medición de la desigualdad.

De la expresión (5) de la curva de Lorenz correspondiente al modelo Dagum tipo I se deduce la siguiente curva de densidad,

$$I(p) = \frac{F^{1/\beta\delta}(1-F^{1/\beta})^{-1/\delta}}{\beta B(\beta+1/\delta, 1-1/\delta)} \quad (6)$$

Esta curva es un indicador del proceso de formación de la desigualdad total de la distribución vía acumulación de renta. A partir de esta información se establece lo sucedido con la desigualdad de las distribuciones comparadas. Su utilidad fundamental radica en poder establecer qué decilas contribuyen a aumentar o disminuir la desigualdad.

De igual forma, la curva $Z(p)$ (Zenga, 1984) *mide el grado de desigualdad para cada valor de p , de forma directa.*

Al igual que con las curvas de Lorenz estimadas, en el anexo aparecen las estimaciones de las curvas $I(p)$ y $Z(p)$ correspondientes al año 1981 y 1991 de algunas Comunidades Autónomas y para el caso conjunto de España, que nos servirán como ejemplos ilustrativos. Las estimaciones para el resto de CC.AA españolas se encuentran en Haro García (1995). Según los resultados obtenidos se realiza el siguiente análisis.

Las formas que adoptan todas las curvas $I(p)$ son las mismas para ambos años. Esto es, creciente partiendo del origen (0,0). Lo que pone de manifiesto la forma asimétrica a la derecha de la distribución de la renta en España.

El comportamiento general de los resultados obtenidos a través de la curva de Zenga muestra que para los tramos más bajos de renta $Z(p)$ es una función decreciente de p y creciente para los tramos altos. Esto es, la contribución a la desigualdad total de una sociedad es mucho menor en las capas más desfavorecidas que en la de los más ricos. Resultados coincidentes con estudios empíricos en modelos triparamétricos (Dancelli 1990, Salvaterra 1990). Hemos de destacar que la curva de Zenga no tiene un comportamiento forzado como por ejemplo la curva de Lorenz, esto es, $Z(p)$ puede adoptar diferentes formas.

Las Comunidades que han visto disminuir la desigualdad en el período considerado según $Z(p)$ son: Andalucía (anexo, gráfico 3) Aragón, Asturias, Castilla y León, Galicia, Madrid (anexo, gráfico 6) y Navarra. En tal caso las curvas $Z(p)$ correspondientes a 1991 dominan a las de 1981, es decir, en todas ellas las curvas de 1991 están más próximas al eje de abscisas que las de 1981. Si se observan sus correspondientes curvas $I(p)$ la acumulación de renta superior en 1991 en los primeros tramos y la posterior disminución en las decilas de mayor renta hace que las curvas se crucen de un año a otro, dándose la situación propicia para deducir que la desigualdad disminuye de 1981 a 1991. Aspecto que se ratifica con la curva $Z(p)$.

En las Comunidades de Cantabria (anexo, gráfico 11), Castilla-La Mancha, y Comunidad Valenciana las curvas $I(p)$ para el período considerado son prácticamente idénticas, por ello en tales situaciones no está clara la contribución de las decilas a la desigualdad total. Es un caso que denota por qué es un criterio de ordenación parcial. Para saber qué ha ocurrido con la desigualdad se puede recurrir a la curva $Z(p)$ pero si se observan sus respectivos gráficos (como ejemplo ver en anexo, gráfico 12) resultan ser casos de cruces por lo que no se pueden establecer dominancias. Lo que no impide que se pueda ver lo ocurrido con la desigualdad por tramos de renta.

En el resto de Comunidades aumenta la desigualdad. Como ejemplo, observamos el caso del País Vasco (anexo, gráfico 8), donde su curva de densidad de Lorenz, $I(p)$ muestra como la acumulación es superior en 1981 en las primeras decilas y superior en las últimas decilas en 1991.

Finalmente, en el gráfico 14 aparece la evolución de la desigualdad a nivel global para España con el criterio $I(p)$. Se observa como la desigualdad de 1981 a 1991 disminuye muy levemente hasta la tercera decila. De la tercera a la séptima decila las curvas se funden en una, esto es, la acumulación es la misma en ambos años, y a partir de la séptima decila la acumulación es menor en 1991. Si observamos las curvas de Zenga (anexo, gráfico 15) la mayor contribución a la disminución de la desigualdad se debe a los tramos más bajos, hasta el 20% de la población de menores ingresos. Posteriormente, se van igualando ambas curvas hasta llegar a $p=0.6$ donde se confunden en una sola. Tanto con $I(p)$ como con $Z(p)$ se contribuye a una disminución de la desigualdad a nivel nacional.

Según $Z(p)$ es de destacar como en la mayoría de las CC.AA. donde disminuye la desigualdad la reducción de la misma es máxima en los primeros tramos de la distribución, sobre todo en $p=0.1$. Este aspecto se recoge a través de la curva $Z(p)$ para España.

Esto confirma los resultados obtenidos en otra serie de estudios puestos de manifiesto en el Primer Simposio sobre Igualdad y Distribución de la Renta y la Riqueza celebrado en Madrid en 1993 donde se afirmaba que la universalización de las pensiones, la extensión de los servicios sociales y los ingresos de integración o salario social, en la casi totalidad de las Comunidades Autónomas ha hecho disminuir la pobreza extrema en la década de los ochenta en España.

A modo de resumen, se exponen en la tabla 4.2 los resultados obtenidos sobre la evolución de la desigualdad de 1981 a 1991 en España y por CC.AA. a través de los tres criterios de ordenación parcial analizados.

TABLA 4.2
EVOLUCIÓN DE LA DESIGUALDAD EN ESPAÑA Y POR CC.AA.
(1981-1991)

CC.AA.	CURVA L(p)	CURVA I(p)	CURVA Z(p)
ANDALUCIA	DISMINUYE	DISMINUYE	DISMINUYE
ARAGON	DISMINUYE	DISMINUYE	DISMINUYE
ASTURIAS*	DISMINUYE	DISMINUYE	DISMINUYE
BALEARES	DISMINUYE	DISMINUYE	CRUCE
CANARIAS	AUMENTA	AUMENTA	AUMENTA
CANTABRIA	CRUCE	NC	CRUCE
CAST Y LEON	DISMINUYE	DISMINUYE	DISMINUYE
CAST-MANCHA	CRUCE	NC	CRUCE
CATALUÑA	AUMENTA	AUMENTA	AUMENTA
C.VALENCIANA	AUMENTA	NC	CRUCE
EXTREMADURA	AUMENTA	AUMENTA	AUMENTA
GALICIA	DISMINUYE	DISMINUYE	DISMINUYE
MADRID*	DISMINUYE	DISMINUYE	DISMINUYE
MURCIA	AUMENTA	AUMENTA	AUMENTA
NAVARRA*	DISMINUYE	DISMINUYE	DISMINUYE
PAIS VASCO*	AUMENTA	AUMENTA	AUMENTA
RIOJA*	AUMENTA	AUMENTA	AUMENTA
ESPAÑA	DISMINUYE	DISMINUYE	DISMINUYE

Fuente: Elaboración propia.

Con NC denotamos los casos en que no está clara la contribución de las decilas en el aumento o disminución de la desigualdad según el criterio I(p), al coincidir casi exactamente las curvas de 1981 y 1991. De igual modo, con la situación de cruce se establece la no dominancia de una

distribución sobre otra. En las CC.AA. donde aparece * significa que en ellas la desigualdad aumenta o disminuye, según sea el caso, en mayor medida que en el resto a través de las tres curvas analizadas.

Así, de forma general, salvo en los pocos casos de cruces: $L(p)$, $I(p)$ y $Z(p)$ ordenan las distribuciones de igual forma, y los resultados obtenidos con los índices de desigualdad coinciden con los obtenidos a través de $L(p)$, $I(p)$ y $Z(p)$.

4.3. Bienestar social según la curva de Lorenz generalizada

Para analizar el bienestar asociado a la distribución de la renta en España acudiremos a la curva de Lorenz generalizada, $GL(p)=\mu L(p)$, cuando sea necesario, ya que en determinadas ocasiones la curva de Lorenz, $L(p)$, es un criterio válido para concluir en términos de bienestar social (BS).

Los ingresos medios juegan un papel determinante en este terreno aportando la componente de crecimiento o eficiencia en el bienestar social. Emplearemos las medias estimadas a través del modelo Dagum I (1977), $\mu=\beta\lambda^{1/\delta} B(\beta+1/\delta, 1-1/\delta)$, por Comunidades y para España, correspondientes a 1981 y 1991, *en pesetas constantes de 1983*. De forma general, han aumentado todas las medias de 1981 a 1991 tanto por CC.AA. como para el caso de España (tabla 4.3.1).

La segunda componente de la que depende el bienestar social según $GL(p)$ es $L(p)$ la cual introduce aspectos distributivos. Las estimaciones de $L(p)$ realizadas en la sección 4.1 han sido utilizadas en este apartado para obtener $GL(p)$. Por tanto, para medir el BS asociado a la distribución de los ingresos en España tenemos en cuenta el tamaño total de las rentas (μ) y como éste es distribuido ($L(p)$).

Atendiendo a los criterios que acabamos de mencionar, podemos distinguir los siguientes casos que se recogen de una forma ilustrativa en el cuadro 4.3.

La situación es la siguiente:

- Las Comunidades donde 1991 domina según el criterio de Lorenz a 1981, es decir, hay menos desigualdad en la distribución de 1991, y su renta media es superior en 1991 son: Andalucía, Aragón, Asturias, Baleares, Castilla y León, Galicia, Madrid y Navarra.

Estos son casos de "no conflicto". Esto es, por ser las medias diferentes y atendiendo a la *consecuencia* que se deriva del teorema de Atkinson¹³ (1970), se cumple $\mu_{1991} > \mu_{1981}$, $L_{1991} \geq L_{1981}$, por tanto GL_{1991}

13. El teorema de Atkinson establece que dadas dos distribuciones de renta de igual renta media la que domine en términos de Lorenz, también poseerá mayor bienestar.

$\geq GL_{1981}$. Estas Comunidades no sólo poseen menor desigualdad en 1991 sino que su renta media también se ve incrementada en tal período. Por tanto, en este caso disminuye la desigualdad y aumenta el bienestar social.

TABLA 4.3.1
MEDIAS ESTIMADAS (PTAS DE 1983)

CC.AA.	1981	1991
ANDALUCIA	975.846	1.262.734
ARAGON	1.156.614	1.442.126
ASTURIAS	1.267.900	1.520.832
BALEARES	1.172.154	1.645.840
CANARIAS	1.096.853	1.416.349
CANTABRIA	1.245.006	1.612.236
CAST Y LEON	1.056.818	1.383.697
CAST-LA MANCHA	851.813	1.230.180
CATALUÑA	1.421.179	1.674.429
C.VALENCIANA	1.150.183	1.359.976
EXTREMADURA	748.135	1.072.485
GALICIA	1.073.744	1.420.706
MADRID	1.494.890	1.775.230
MURCIA	1.031.692	1.271.842
NAVARRA	1.450.469	1.713.613
PAIS VASCO	1.460.722	1.686.751
RIOJA	1.158.589	1.599.655
ESPAÑA	1.222.711	1.490.303

Fuente: Elaboración propia.

- Las Comunidades donde “hay conflicto” entre desigualdad y bienestar social son: Canarias, Cataluña, Comunidad Valenciana, Extremadura, Murcia, País Vasco y La Rioja. La desigualdad es superior en 1991 y, por contra, la media es superior en dicho año. Se puede afirmar que en cada una de esas regiones la distribución de 1981 domina según Lorenz a la de 1991. Para analizar lo ocurrido con el bienestar acudimos al criterio de la curva de Lorenz generalizada.

Dado que $GL(p) = \mu L(p)$ y las medias de 1991 son superiores a las de 1981 para ver lo ocurrido con las generalizadas es necesario construir sus curvas por Comunidades y por decilas acumuladas, ya que puede que el aumento de la media no sea suficiente para establecer la domi-

nancia generalizada. En las tablas 4.3.2, 4.3.3 y 4.3.4 aparecen las distribuciones del ingreso medio estimado por decilas acumuladas en pesetas de 1983, para estas Comunidades.

En todas estas Comunidades, salvo en el País Vasco, se ha producido un aumento del bienestar. En el País Vasco no se puede establecer una dominancia de generalizadas ya que éstas se cortan, si bien el cruce se produce en la primera decila y por poca diferencia. Para el resto de las decilas se produce un aumento del bienestar.

– Las Comunidades donde se cruzan las curvas de Lorenz son Cantabria y Castilla-La Mancha que según el criterio de Lorenz generalizado (tabla 4.3.4) en ambos casos la distribución de 1991 domina a la de 1981. El bienestar en 1991 es superior al de 1981, sin embargo, no podemos concluir nada en cuanto a la desigualdad se refiere.

Finalmente, en España se ha producido una disminución de la desigualdad casi inapreciable acompañada de un aumento de la renta media y por tanto del bienestar.

CUADRO 4.3
DESIGUALDAD Y BIENESTAR SOCIAL

CRITERIOS		CC.AA.	DESIGUALDAD Y BIENESTAR SOCIAL
DOMINANCIA DE LORENZ $L_{1991} \geq L_{1981}$ $\mu_{1991} > \mu_{1981}$		ANDALUCIA ARAGON ASTURIAS BALEARES CAST Y LEON GALICIA MADRID NAVARRA	DISMINUYE LA DESIGUALDAD Y AUMENTA EL BIENESTAR SOCIAL
DOMINANCIA DE LORENZ $L_{1981} \geq L_{1991}$ $\mu_{1991} > \mu_{1981}$	DOMINANCIA DE LORENZ GENERALIZADA $GL_{1991} \geq GL_{1981}$	CANARIAS CATALUÑA C. VALENCIANA EXTREMADURA MURCIA LA RIOJA	AUMENTA LA DESIGUALDAD Y AUMENTA EL BIENESTAR SOCIAL
	NO HAY DOMINANCIA DE LORENZ GENERALIZADA	PAIS VASCO	AUMENTA LA DESIGUALDAD
NO HAY DOMINANCIA DE LORENZ $\mu_{1991} > \mu_{1981}$	DOMINANCIA DE LORENZ GENERALIZADA $GL_{1991} \geq GL_{1981}$	CANTABRIA CAS-LA MANCHA	AUMENTA EL BIENESTAR SOCIAL

Fuente: Elaboración propia.

TABLA 4.3.2
DISTRIBUCION DEL INGRESO MEDIO ESTIMADO POR DECILAS
ACUMULADAS. (PTAS DE 1983)

Dec.	CANARIAS		CATALUÑA		C.VALENCIANA	
	1981	1991	1981	1991	1981	1991
1	29.364	34.696	45.248	47.506	33.981	39.966
2	74.941	89.953	110.058	118.268	84.434	98.674
3	131.634	159.581	188.110	205.032	146.066	170.229
4	198.757	242.820	278.629	306.966	218.189	253.955
5	276.824	340.440	382.295	424.975	301.336	350.574
6	367.361	454.563	501.018	561.483	397.068	462.027
7	473.374	589.309	638.508	721.175	508.443	592.062
8	600.939	753.000	802.227	913.348	641.625	748.218
9	765.382	966.752	1.010.910	1.162.244	812.121	949.530
10	1.096.853	1.416.349	1.421.179	1.674.429	1.150.183	1.359.976

Fuente: Elaboración propia.

TABLA 4.3.3
DISTRIBUCIÓN DEL INGRESO MEDIO ESTIMADO POR DECILAS
ACUMULADAS. (PTAS DE 1983)

Dec.	EXTREMADURA		MURCIA		PAÍS VASCO	
	1981	1991	1981	1991	1981	1991
1	19.918	27.569	29.890	35.427	54.423	53.402
2	51.176	70.714	74.724	88.812	127.304	129.174
3	90.180	124.652	129.706	154.549	212.675	220.267
4	136.415	188.784	194.202	231.962	309.863	325.912
5	190.195	263.666	268.681	321.718	419.561	447.021
6	252.528	350.864	354.544	425.646	543.632	585.965
7	325.423	453.429	454.539	547.295	685.655	747.303
8	412.943	577.518	574.216	693.814	852.771	940.176
9	525.318	738.718	727.530	883.272	1.062.808	1.187.621
10	748.135	1.072.485	1.031.692	1.271.842	1.460.722	1.686.751

Fuente: Elaboración propia.

TABLA 4.3.4
DISTRIBUCION DEL INGRESO MEDIO ESTIMADO POR DECILAS
ACUMULADAS. (PTAS DE 1983)

Dec	LA RIOJA		CANTABRIA		C.LA MANCHA	
	1981	1991	1981	1991	1981	1991
1	38.342	45.836	38.095	50.941	21.170	31.271
2	92.544	113.977	93.756	123.363	55.260	80.405
3	157.425	197.426	161.307	210.482	98.292	141.943
4	232.342	295.366	240.028	311.548	149.704	215.201
5	317.823	408.641	330.496	427.421	209.885	300.829
6	415.384	539.541	434.388	560.364	280.030	400.631
7	527.976	692.505	554.983	714.726	362.505	518.128
8	661.524	876.457	698.873	899.224	462.100	660.421
9	830.882	1.113.956	882.637	1.135.836	590.910	845.500
10	1.158.589	1.599.655	1.245.006	1.612.236	851.813	1.230.180

Fuente: Elaboración propia.

A todo ello hemos de añadir que exceptuando los casos de cruces de curvas de Lorenz, se han podido establecer ordenaciones completas tanto de desigualdad como de bienestar en el período considerado para cada Comunidad. Si bien nos reafirmamos en que tanto en los casos de conflicto como de no conflicto el criterio de Lorenz y el de la curva de Lorenz generalizada aluden a dos cuestiones diferentes. *Con la curva de Lorenz se puede concluir sobre desigualdad (criterio de equidad) y con la curva de Lorenz generalizada se concluye sobre bienestar social (criterio de eficiencia y equidad).*

Evidentemente cuando se cumpla el teorema de Atkinson (1970) el criterio de Lorenz es suficiente para concluir también sobre bienestar, pero suponer que las distribuciones comparadas tienen igual media es bastante difícil de encontrar en la práctica. La consecuencia que se deriva de este teorema si es suficiente para aproximar el bienestar social.

5. CONCLUSIONES

El análisis de la evolución de la desigualdad y del bienestar en España de 1981 a 1991, pone de manifiesto como la desigualdad de la distribución de los ingresos anuales de los hogares en el conjunto nacional de

1981 a 1991 ha disminuido en poca medida. Los distintos instrumentos tanto de ordenación parcial como de ordenación completa así lo ponen de manifiesto. De igual forma, al poseer una renta media superior en 1991 podemos afirmar que el bienestar de la sociedad española ha aumentado.

Así, prácticamente en la mitad de las CC.AA. españolas disminuye la desigualdad y en la otra mitad aumenta. A esta conclusión nos llevan tanto el índice de Gini como el índice de Zenga puesto que proporcionan igual ordenación de las distribuciones de renta analizadas. Las Comunidades donde aumenta la desigualdad son Canarias, Cataluña, Cantabria, Castilla-La Mancha, Comunidad Valenciana, Extremadura, Murcia, País Vasco y La Rioja.

El análisis de las curvas $Z(p)$ pone de relieve como la disminución de la desigualdad del conjunto nacional está influenciada por aquellas Comunidades cuya disminución de la desigualdad tiene lugar en los primeros tramos de la distribución.

Finalmente, destacar que las Comunidades donde ha disminuido más la desigualdad son Asturias, Madrid y Navarra. En cambio, en el País Vasco y La Rioja los incrementos de desigualdad son los mayores de España. A grandes rasgos, las regiones de mayores niveles de bienestar social en 1981 lo siguen teniendo en 1991, al igual que les ocurre a las de menores niveles de bienestar.

6. ANEXO

GRÁFICO 1
CURVAS DE LORENZ DE ANDALUCÍA

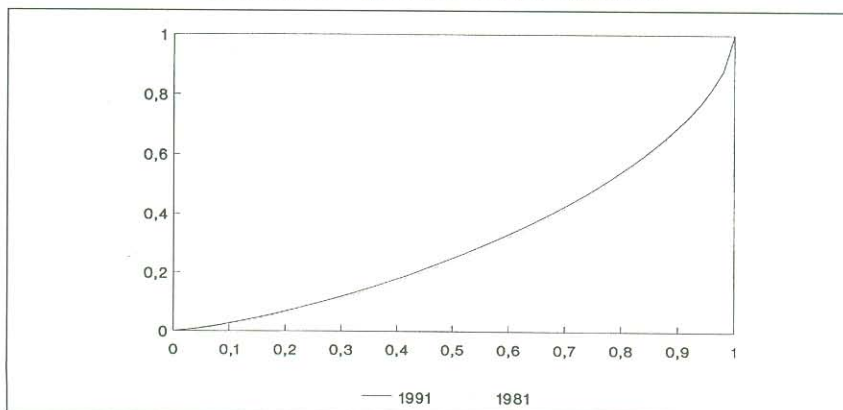


GRÁFICO 2
CURVAS I(P) DE ANDALUCÍA

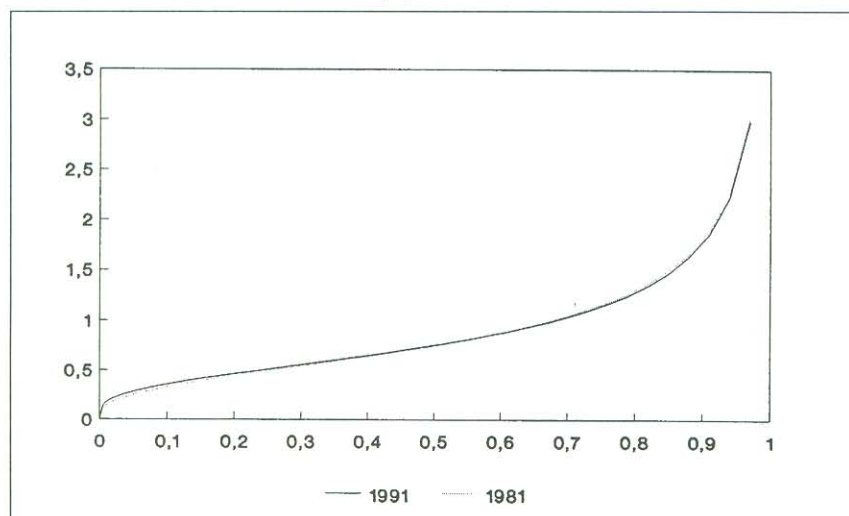


GRÁFICO 3
CURVAS DE ZENGA DE ANDALUCÍA

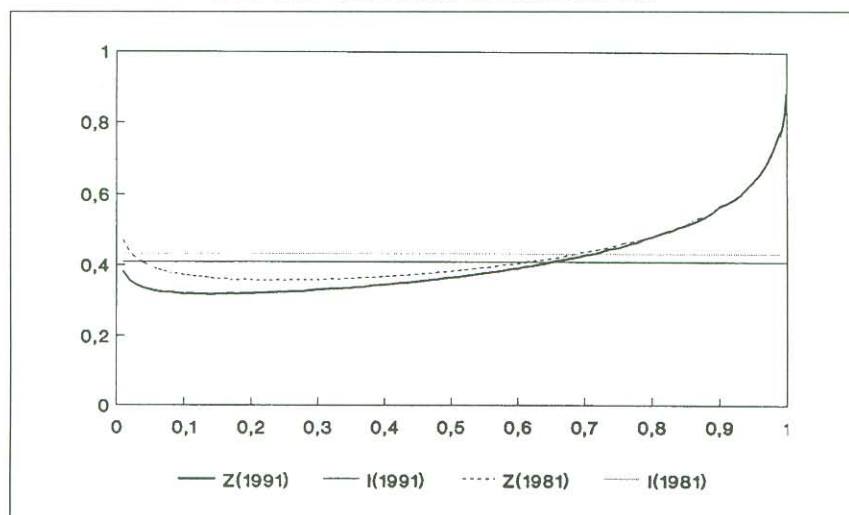


GRÁFICO 4
CURVAS DE LORENZ DE MADRID

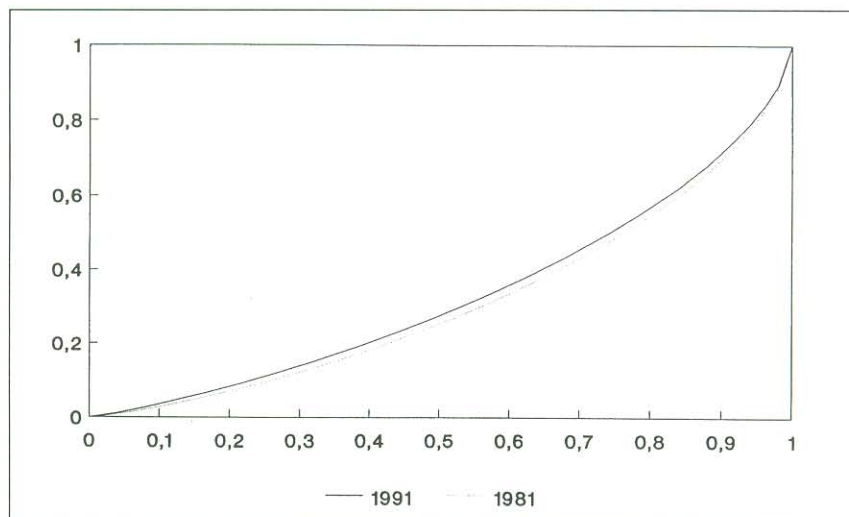


GRÁFICO 5
CURVAS I(P) DE MADRID

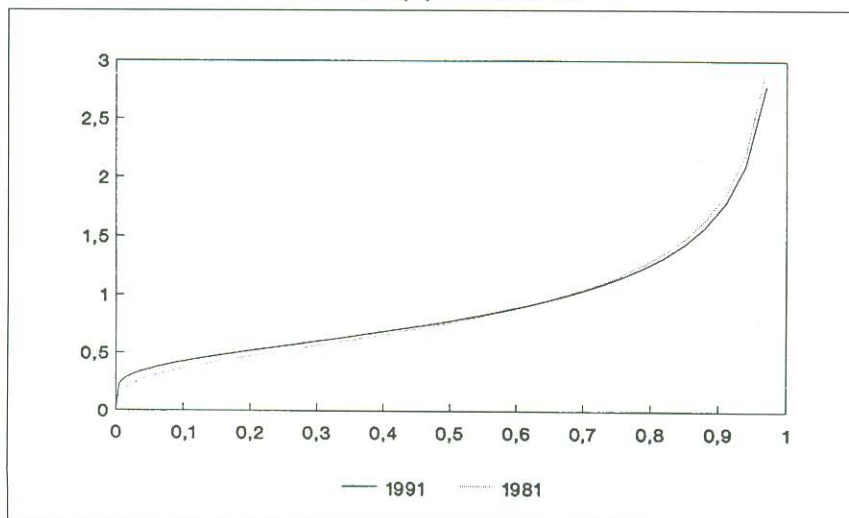


GRÁFICO 6
CURVAS DE ZENGA DE MADRID

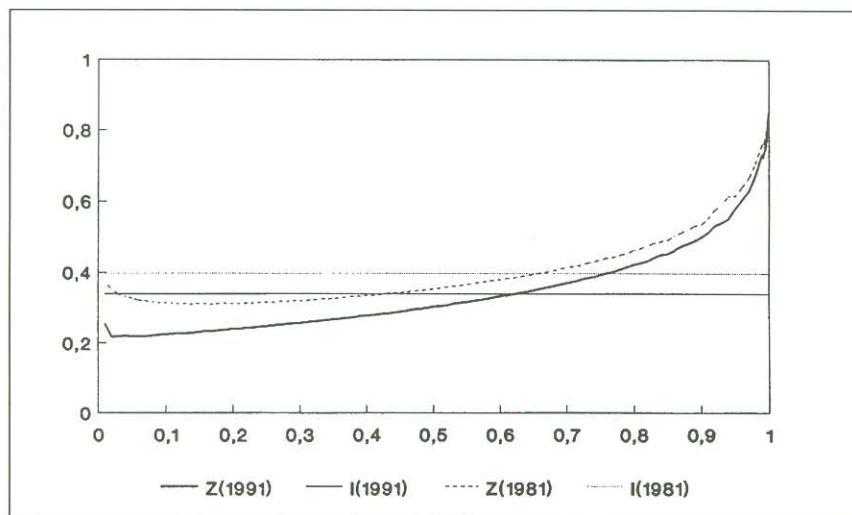


GRÁFICO 7
CURVAS DE LORENZ DEL PAÍS VASCO

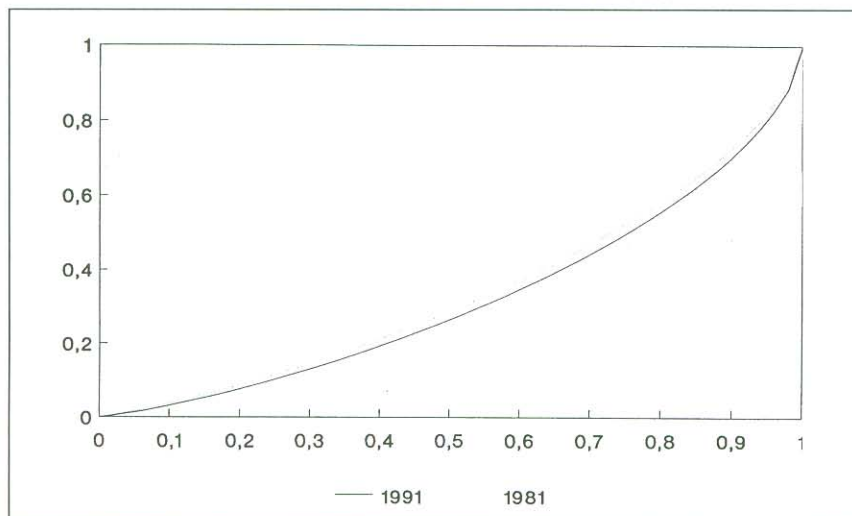


GRÁFICO 8
CURVAS I(P) DEL PAÍS VASCO

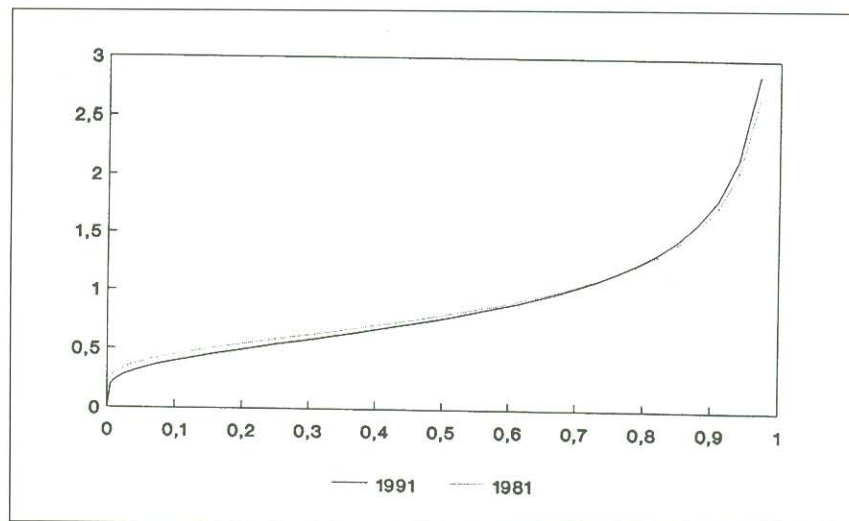


GRÁFICO 9
CURVAS DE ZENGA DEL PAÍS VASCO

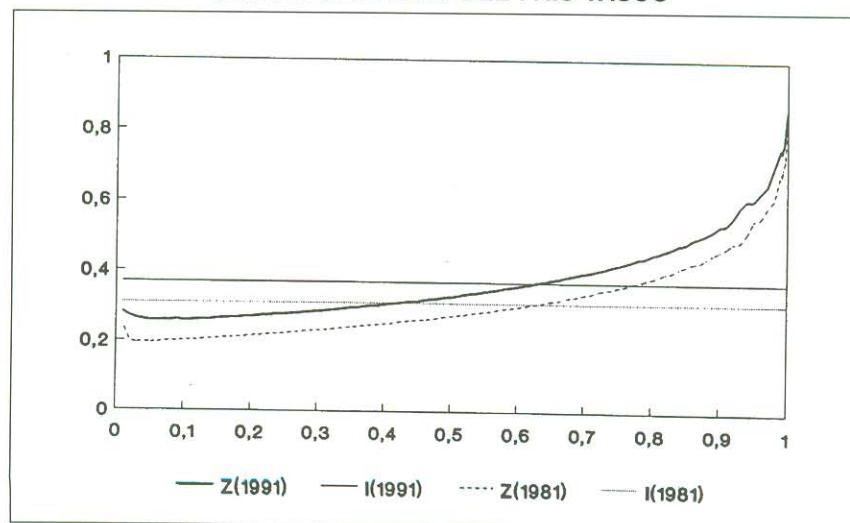


GRÁFICO 10
CURVAS DE LORENZ DE CANTABRIA

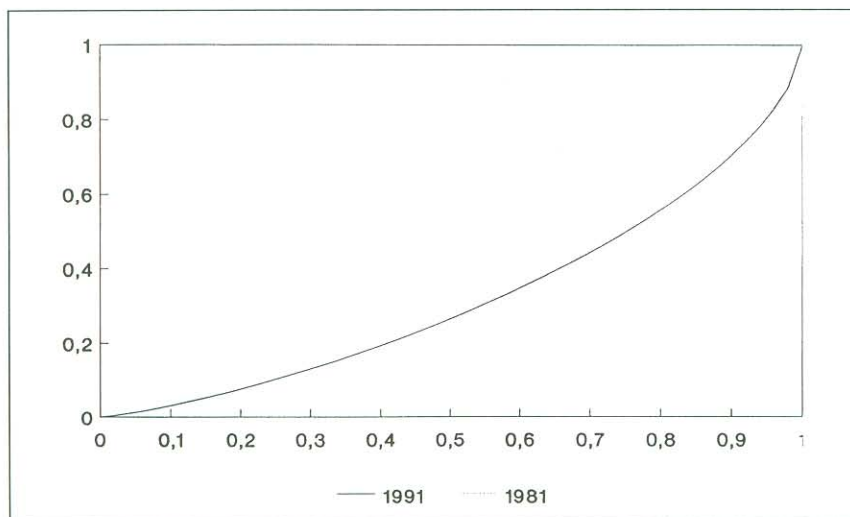


GRÁFICO 11
CURVAS I(P) DE CANTABRIA

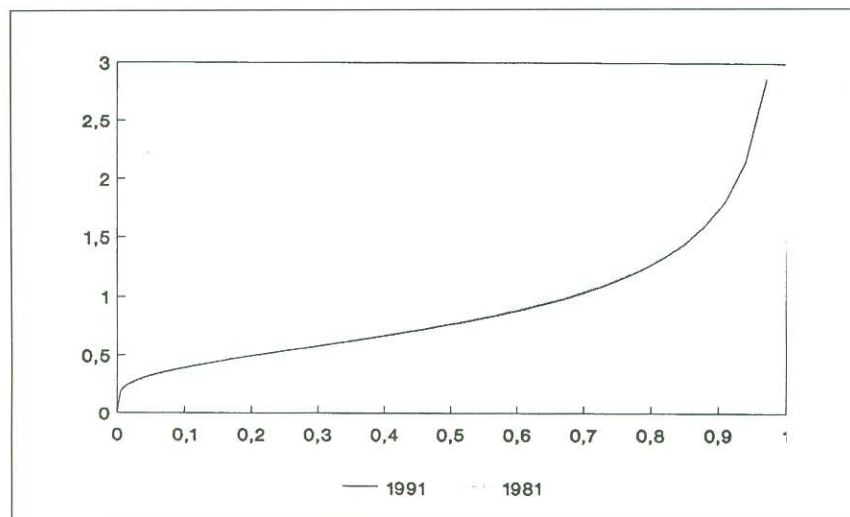


GRÁFICO 12
CURVAS DE ZENGA DE CANTABRIA

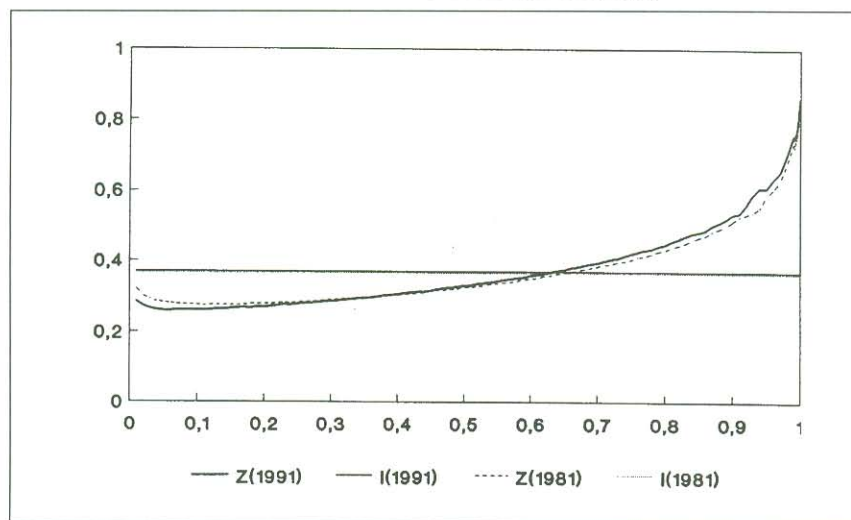


GRÁFICO 13
CURVAS DE LORENZ DE ESPAÑA

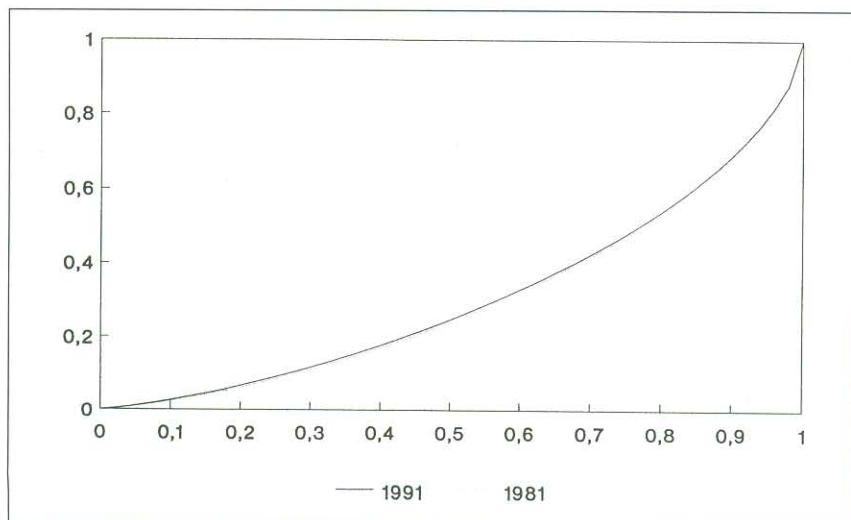


GRÁFICO 14
CURVAS I(P) DE ESPAÑA

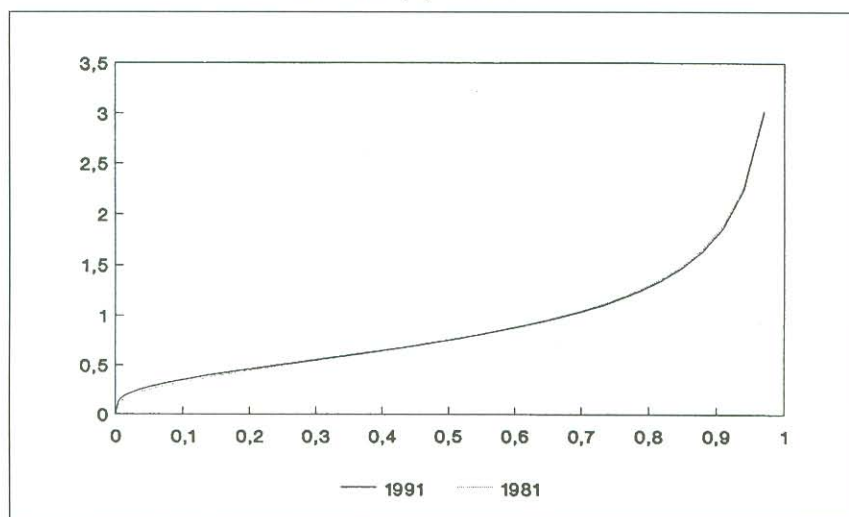
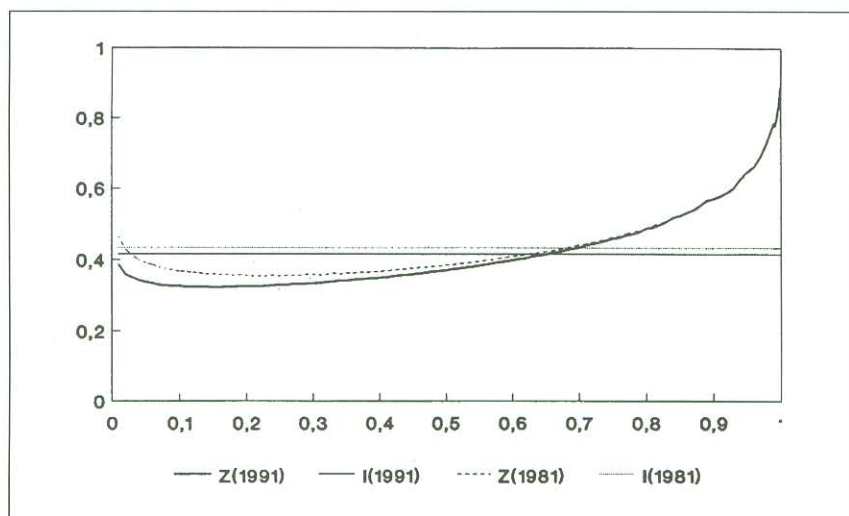


GRÁFICO 15
CURVAS DE ZENGA DE ESPAÑA



BIBLIOGRAFÍA

- ATKINSON, A. B. (1970): "On the Measurement of Inequality" *Journal of Economic Theory*, 2, 244-263.
- BIRTA, L.G. (1978): "OPTPAK, A Program Package for Unconstrained Function Minimization", *Technical Report* TR76-02 (1978), University of Ottawa.
- CHAKRAVARTY, S. R. (1990): *Ethical Social Index Numbers*, Springer-Verlag.
- DAGUM, C. (1977): "A New Model of Personal Income Distribution: Specification and Estimation", *Économie Appliquée*, Vol. XXX, 3, 413-436.
- DAGUM, C. (1980): "Inequality Measures between Income Distributions with Applications", *Econometrica*, 48, 1791-1803.
- DAGUM, C. (1993): "Fundamentos de Bienestar Social de las Medidas de Desigualdad en la Distribución de la Renta", *Cuadernos de Ciencias Económicas y Empresariales*, nº 24, Universidad de Málaga.
- DANCELLI, L. (1989): "Sulle Determinanti dell'Andamento della Curva di Concentrazione $Z(p)$ ", *Working Paper* Università di Brescia, Dipartimento di Statistica e Matematica.
- DANCELLI, L. (1990): "On the Behaviour of the $Z(p)$ Concentration Curve", en Dagum, C y Zenga, M. (1990), 111-127.
- DELGADO CABEZA, M. (1988): "Un Modelo para la Distribución de la Renta. Aplicación a la Distribución de la Renta Familiar Disponible de las Comunidades Autónomas", en *Homenaje a A. García Barbancho*. Junta de Andalucía, ed. Consejería de Hacienda y Planificación, 85-99.
- FISK, P.R. (1961): "The Graduation of Income Distribution", *Econometrica*, 29, 171- 185.
- HARO GARCÍA, J. DE. (1992): "Modelos de Distribución de Renta Biparamétricos", *Papeles de Trabajo*, 11, Universidad de Málaga.
- HARO GARCÍA, J. DE. (1995): *Medición de la Desigualdad y el Bienestar Social. Análisis de la Distribución de la Renta en España. (1981-1991)*. Tesis Doctoral, Universidad de Málaga.
- LÓPEZ MENÉNDEZ, A.J. (1991): *Desigualdad de Renta y Pobreza: una Aproximación Conceptual y Cuantitativa*. Tesis Doctoral, Universidad de Oviedo.
- POLLASTRI, A. (1987): "Le Curve di Concentrazione $L(p)$ e $Z(p)$ nella Distribuzione Log- Normale Generalizzata", *Giornale degli Economisti e Annali di Economia*, nº 11-12, 639-663.
- RUIZ-CASTILLO, J. (1987): "La Medición de la Pobreza y de la Desigualdad en España, 1980-81", *Estudios Económicos*, 42, Banco de España.

- SALEM, A.B.Z. y T.D. MOUNT (1974): "A Convenient Descriptive Model of Income Distribution", *Econometrica*, 42, 1115-1127.
- SALVATERRA, T. (1985): "Problemi di Calcolo della Curva di Concentrazione di Zenga e dell'Indice di Concentrazione ξ ", in *Pubblicazioni dell'Istituto di Statistica e Ricerca Operativa dell'Università di Trento*.
- SALVATERRA, T. (1987): "Analisi Comparata dei Procedimenti di Calcolo dei Rapporti di Concentrazione $Z(p)$ e dell'Indice di Concentrazione ξ di Zenga", in *La Distribuzione Personale dei Redditi: Problemi di Formazione, di Ripartizione e di Misurazione*, Vita e Pensionero, 230-249, Milano.
- SALVATERRA, T. (1990): "Comparisons Among Concentration Curves and Indexes in Some Empirical Distributions", en Dagum, C y Zenga, M. (1990), 194-214.
- ZENGA, M. ((1984): "Proposta per un Indice di Concentrazione Basato sui Rapporti fra Quantili di Popolazione e Quantili di Reddito", *Giornale degli Economisti e Annali di Economia*, XLIII, 301-326.

Recibido, Diciembre 1995; Aceptado, Marzo 1996.