ESTUDIOS REGIONALES Nº 50 (1998), PP 161-186

La distribución Gamma como modelo para analizar la distribución de la Renta: una aplicación a la E.P.F. 1990-91

Matilde Lafuente Lechuga
Universidad de Murcia

BIBLID [0213-7525 (1998); 50; 161-186]

PALABRAS CLAVE: Distribución de la Renta, Distribución gamma diparamétrica, medidas de desigualdad.

RESUMEN:

En este trabajo se presentan argumentos que señalan a la distribución gamma biparamétrica como modelo para analizar la distribución de la renta, al unir un buen grado de ajuste a la realidad empírica con la posibilidad de estimar las medidas de desigualdad asociadas sin grandes dificultades. Con el fin de ilustrar con datos reales la bondad del modelo, se ha hecho uso de la información de base de la Encuesta de Presupuestos Familiares 1990-91 elaborada por el Instituto Nacional de Estadística. Los resultados que se han obtenido nos permiten concluir, por un lado que se puede aceptar la hipótesis de que la distribución de los ingresos proviene de una población distribuida según una gamma biparamétrica, y por otro, que obtenidos tres índices de desigualdad teóricos (Gini, uno de la familia de Atkinson y otro de la familia de medidas de Entropía Generalizada), éstos se aproximan suficientemente a los índices calculados tomando como base los datos de la muestra.

ABSTRACT:

In this paper we give arguments to say that the biparametric gamma distribution is a good model to study income distribution, as it shows a good fit to data and offers the possibility of estimating inequality measurements without great dificulty. In order to illustrate with real data the fitness of the model, we have used the “Encuesta de Presupuestos Familiares 1990-91” made up by Instituto Nacional de Estadística. The results obtained allow to conclude two ideas: that the income distribution is a biparametric gamma distribution, and that, having obtained three theoritical inequality indexes (Gini, one belonging to the Atkinson family and another one belonging to the measurement family of generalized Entropy), these are very near to the indexes based on the data of the sample.

1. INTRODUCCIÓN

Son muchos y variados los modelos estadísticos propuestos en la literatura económica encaminados hacia el análisis de la distribución de la renta. Dada la gran diversidad de aportaciones existentes en este campo se hace necesaria, para cada estudio en particular, la selección del modelo adecuado. La elección en cada caso se puede realizar atendiendo a diversas propiedades y criterios, siempre teniendo en cuenta la finalidad que se pretenda del mismo.

En este trabajo se hace uso de un modelo de distribución de renta con fines exclusivamente experimentales. Es decir, se trata de encontrar un modelo de distribución de la renta para poder obtener a partir de él estimaciones de algunas medidas de desigualdad.

Por tanto, se necesita un modelo que reúna una serie de propiedades aptas para esta finalidad instrumental. Entre las propiedades más importantes que debe satisfacer destacan, por un lado, la posibilidad de estimar las medidas de desigualdad asociadas a dicho modelo sin grandes dificultades y, por otro, un buen grado de ajuste a la realidad empírica. Además, resulta recomendable contar con un método de estimación que permita conocer las propiedades de los estimadores de los parámetros y derivar, a partir de ellos, las propiedades de los estimadores de las medidas de desigualdad.

Tales características las hemos encontrado en la distribución gamma biparamétrica, razón por la cual ha sido el modelo que hemos seleccionado para realizar nuestro estudio. Junto con una breve descripción de esta distribución, se presentarán las expresiones de algunos índices de desigualdad para esta distribución, así como sus estimadores máximo-verosímiles.

Con el fin de ilustrar con datos reales la bondad del modelo, nos planteamos hacer uso de los datos de base de la Encuesta de Presupuestos Familiares que elabora el Instituto Nacional de Estadística, y más concretamente de la que tiene como período de referencia el que va de abril de 1990 a marzo de 1991.

Hemos incluído una breve descripción de la operación estadística que vamos a utilizar como fuente, para a continuación definir la variable que vamos a usar para calcular las medidas de desigualdad.

A continuación se han obtenido la curva de Lorenz y las medidas de desigualdad que hemos considerado más representativas a partir de los datos de la muestra, determinando cuales son las Comunidades Autónomas para las que son mayores las disparidades de renta.

El último apartado lo dedicamos a obtener el modelo de distribución de la renta que pensamos más idóneo para explicar el comportamiento de la muestra que hemos tomado de partida. Se han calculado los estimadores máximo verosímiles de los parámetros del modelo, y para dichos parámetros los índices de desigualdad teóricos. Para finalizar se ha comprobado si los índices calculados tomando como base los datos de la muestra se aproximan suficientemente a aquellos.

2. DISTRIBUCIÓN GAMMA

La distribución Gamma, también conocida como tipo III de Pearson, es un modelo probabilístico bien conocido que tiene su origen en el sistema generador de Pearson. Aunque inicialmente esta distribución no surgió como un modelo para analizar la distribución de la renta, son varios los autores que la han utilizado para este fin. Entre ellos cabe destacar, como señala Dagum (1989), los trabajos de Ammon,O. y L. March de 1895 y 1898, por ser las primeras aplicaciones de la distribución gamma a la distribución de la renta; o el de Amoroso, quien utilizó la gamma de cuatro parámetros entre los años 1924-1925.

Tras un paréntesis de cuatro décadas, durante las cuales se aplicó frecuentemente el modelo lognormal para explicar la distribución de la renta, Salem, A.B.Z. y T.D. Mount (1974) en un interesante artículo "reviven" la distribución gamma para estos fines y demuestran que ésta da una mayor aproximación que el modelo lognormal en la distribución de la renta personal en los Estados Unidos durante el período 1960-1969. Posteriormente, la distribución gamma ha sido utilizada en diversos trabajos, de los que citaremos: Singh,S.K. y G.S. Maddala (1976); Kloek, T. y H.K. Van Dijk (1978); McDonald, J. y B.C. Jensen (1979); McDonald, J. y R. Ramson (1979); McDonald, J. (1984); Esteban, J. (1986).

La distribución tipo III de Pearson, o distribución gamma biparamétrica G(p,a), se caracteriza por la función de densidad

$$f(y) = \begin{cases} \dfrac{a^p}{(p)}\, y^{p-1}\, e^{-ay} & 0 < y < \quad , a > 0,\ p > 0 \\ 0 & y \leq 0 \end{cases}$$

Los parámetros de esta distribución, p y a, son conocidos como parámetros de forma o perfil, y de localización o escala, respectivamente. El primero de ellos mide la asimetría de la distribución: cuanto más pequeño es su valor, más asimétrica a la derecha es la distribución. Este parámetro nos informa si el perfil es no modal (p 1) o unimodal (p>1). El parámetro a refleja los cambios de escala en la variable y.

Al igual que todos los miembros del sistema generador de Pearson, esta distribución queda determinada por sus cuatro primeros momentos. Los momentos respecto del origen se calculan de la siguiente expresión:

$$_r = \frac{(p+r)}{a^r \quad (p)}$$

de la que podemos calcular su esperanza matemática y su varianza:

$$E[y] = \frac{p}{a} \qquad ^2 = \frac{p}{a^2}$$

La estimación de los parámetros de la distribución gamma se realiza generalmente a través del método de la máxima verosimilitud. Si conocemos estimaciones del cociente entre la media aritmética y la geométrica de la distribución, se puede acudir a la resolución de un sistema de dos ecuaciones no lineales que implica a ambas.

El modelo gamma es en cuanto a su fundamento, un modelo ad hoc, es decir posee una función de densidad asimétrica y por ello es un buen candidato para ajustar distribuciones de renta.

Esta distribución es un modelo biparamétrico, con una sencilla y clara interpretación de sus parámetros frente a los modelos de más parámetros, que aunque pudieran tener mejor ajuste, sus expresiones son más complejas. Según trabajos empíricos anteriores esta distribución parece ajustarse mejor que otros modelos propuestos de dos parámetros.

McDonald, J.B. y Jensen, B.C. (1979) han desarrollado para esta distribución dos medidas de desigualdad económica: los índices de Gini y Theil.

La medida de desigualdad más conocida y estudiada, el índice de Gini, adopta para la distribución gamma la expresión:

$$G(y) = \frac{\left(p+\frac{1}{2}\right)}{(p+1)}$$

Como puede observarse es una función que sólo depende del parámetro p y no del parámetro de escala ya que el índice de Gini era una medida invariante por homotecias.

La expresión que adopta la familia de medidas de Atkinson para la distribución gamma es la siguiente (Lafuente M. (1995)):

$$A \quad (y) = 1 - \frac{1}{p}\left[\frac{(p+1- \ )}{(p)}\right]^{\frac{1}{1-}} \qquad 1$$

$$A_1(y) = 1 - \frac{1}{p} \quad \exp[\quad (p)]$$

donde (p) es la función digamma.

Hay que hacer notar que el coeficiente de aversión la desigualdad (solo puede tomar valores pertenecientes al intervalo [0,p+1).

Para un valor de fijo, al aumentar p disminuye el valor del índice. Si se deja fijo el valor del parámetro p, al aumentar , también se incrementa el valor de la medida de Atkinson.

La expresión a la que se llega de la familia de medidas de desigualdad de Entropía Generalizada asociadas a la distribución gamma es la que sigue (Lafuente M. (1995)):

$$S_c(y) = k\left[\frac{(p+c)}{p^c\ \ (p)} -1\right] c \quad 0,\ c \quad 1$$

$$S_1(y) = T(y) = \frac{1}{p} + \ (p) - Ln(p)$$

$$S_0(y) = Lnp - \ (p)$$

donde k=1/{c(c-1)} y (p) es la función digamma.

De la misma manera que ocurría con el índice de Atkinson, si ahora se mantiene fijo el parámetro c, el valor de la medida de entropía generalizada disminuye conforme aumenta el parámetro p de la distribución gamma. Sin embargo, no se observa ningún comportamiento regular del valor del índice en función de c, habiéndose fijado el parámetro p.

Las expresiones de las familias de medidas de desigualdad de Atkinson y de Entropía Generalizada, así como la del índice de Gini, pueden considerarse funciones de los parámetros de la distribución gamma biparamétrica G(p,a). De ahí, que las propiedades de los estimadores de dichas medidas dependan de las propiedades de los estimadores de los parámetros p y a de la distribución.

Los estimadores máximo verosímiles de p y a se obtienen maximizando el logaritmo de la función de verosimilitud, cuya solución es el sistema de ecuaciones no lineales siguiente:

$$\left.\begin{aligned} \hat{a} &= \frac{\hat{p}}{\bar{y}} \\ Ln(\hat{p}) &= \ (\hat{p}) = Ln\bar{y} - Ln\tilde{y} = Ln\left(\frac{\bar{y}}{\tilde{y}}\right) \end{aligned}\right\} [1]$$

donde y es la media aritmética, $\tilde{y}$ es la media geométrica y (p) es la función digamma.

Como puede observarse los estimadores máximo verosímiles de p y a dependen únicamente de los estadísticos suficientes media aritmética y media geométrica.

Los estimadores máximo-verosímiles de p y a son asintóticamente eficientes y asintóticamente normales.

Conocidas las expresiones de distintas medidas de desigualdad cuando la renta se distribuye como una distribución gamma biparamétrica de parámetros p y a, Los estimadores de dichas medidas son el resultado de sustituir en sus expresiones respectivas los valores de los parámetros desconocidos de la distribución, p y a, por sus estimaciones máximo-verosímiles. Por tanto, si denotamos por I a una cualquiera de estas medidas, el estimador de I, será una función de los estimadores de p y a, es decir

$$\hat{I} = f(\hat{p}, \hat{a})$$

Debido a la propiedad de invarianza ante transformaciones paramétricas de los estimadores máximo-verosímiles, la función obtenida de esta forma será un estimador máximo-verosímil de I.

3. BREVE DESCRIPCIÓN METODOLÓGICA DE LA E.P.F.

La Encuesta de Presupuestos Familiares es una investigación que viene realizando el Instituto Nacional de Estadística con distinta periodicidad desde 1958, y que permite conocer ciertas características de los hogares, tales como los gastos e ingresos por naturaleza, el equipamiento y las condiciones y servicios de las viviendas.

El método de selección de la muestra corresponde a un muestreo bietápico con estratificación de las unidades de primera etapa, diseñándose una muestra independiente para cada provincia. Las unidades de primera etapa están constituidas por las secciones censales en que se encuentra dividido el territorio nacional en el momento de la encuesta. Las unidades de segunda etapa son las viviendas familiares existentes en las secciones censales seleccionadas para la muestra. Dentro de ellas no se realiza submuestreo alguno, investigándose a todos los hogares y personas que tienen su residencia habitual en las mismas.

El tamaño de la muestra de unidades de primera etapa es de 3.040 secciones. Con el objetivo inicial de conseguir una muestra teórica de unas 28.000

unidades de segunda etapa, se fijó un tamaño muestral medio de 9 viviendas por sección. Al final se ha obtenido información de un total de 21.115 hogares.

4. MUESTRA OBJETO DE ESTUDIO

Los ficheros resultantes de la investigación estadística contienen información sobre 21.155 hogares del Estado Español, lo que supone una cobertura de 72.123 personas. De entre las variables que contenía el fichero de hogares, nosotros nos hemos centrado exclusivamente en la Comunidad Autónoma de residencia.

A la hora de plantearnos qué variable utilizar para obtener índices de desigualdad solo queda decidirse, con los datos que suministra la Encuesta de Presupuestos Familiares, entre hacer uso del ingreso o del gasto.

El conocido estudio de J. Ruiz-Castillo publicado con el título “La Medición de la Pobreza y de la desigualdad en España. 1980-1981”, elaborada en base a la E.P.F. referida a este período, utiliza como variable relevante para construir las medidas de desigualdad y pobreza el gasto total por persona, con exclusión de algunos gastos en bienes duraderos, como automóviles y otros medios de transporte privado, así como los gastos en mantenimiento, reparación y mejora de la vivienda. Es decir, considera esencialmente el consumo corriente de bienes y servicios privados.

Si bien es claro que esta encuesta está enfocada preferentemente a la investigación del gasto de los hogares al pedir un desglose detallado de los gastos de periodicidad semanal, mensual, trimestral o anual, no es menos evidente que por tratarse de una variable que no se investiga a lo largo de todo un año, los valores que se presentan son estimaciones, sin lugar a dudas muy ajustadas, pero al fin y al cabo estimaciones del gasto total en el año.

Los ingresos que se recogen en la encuesta son los del año anterior a la semana en que el hogar entra en la muestra, netos de impuestos directos. Esta variable se detalla para cada miembro de la unidad encuestada y según su naturaleza.

Si nos decantáramos por el gasto como variable a considerar para nuestros fines, no dejaríamos de estar sustituyendo el ingreso por el gasto, pues no olvidemos que lo que se trata es de calcular medidas de desigualdad de renta. Por otro lado, decidir qué gastos en bienes duraderos deberíamos o no incluir, también plantearía más de un problema metodológico.

Estos argumentos nos han hecho decidirnos por considerar los ingresos anuales de los hogares como variable para elaborar este estudio, aún siendo conscientes de la posible infravaloración de que pueden estar afectados.

En este mismo sentido un estudio más reciente, que lleva por título "Encuesta de Presupuestos Familiares. Desigualdad y pobreza en España. Estudio basado en las Encuestas de Presupuestos Familiares de 1973-74, 1980-81 y 1990-91", elaborado por P. Martín-Guzmán y otros, y editado por el Instituto Nacional de Estadística, obtiene las medidas de desigualdad para las dos posibles variables, el gasto y el ingreso.

Para obtener medidas de desigualdad no resulta válido considerar como unidad el hogar, pues lógicamente es distinto el nivel adquisitivo de una familia o colectivo de personas según sea el número de miembros que la componen. La primera posibilidad que se presenta es considerar el ingreso por persona de un hogar, e imputarle a cada individuo perteneciente a dicho hogar ese valor de la variable ingreso. Esta alternativa, que podría ser la más sencilla, tanto a nivel metodológico como de tratamiento informático, presenta el inconveniente de que de esta forma se está infravalorando considerablemente los ingresos de los hogares con mayor número de miembros, con la consiguiente distorsión en los valores de los índices.

Por ello, creemos que sería más ajustado a la realidad considerar para cada hogar el ingreso por unidad de consumo, e imputarle a cada uno de sus miembros dicho ingreso. En ésto se diferencia del estudio antes mencionado, que utiliza como variable el ingreso por habitante.

El número de unidades de consumo del hogar, según la Escala de Oxford, se calcula mediante la suma de los miembros del hogar ponderados según los coeficientes siguientes: 1 para el sustentador principal, 0,7 para los miembros del hogar de 14 y más años, y 0,5 para los miembros del hogar menores de 14 años.

En el Cuadro 1 se detalla la distribución de la muestra por Comunidad Autónoma de residencia, el número de personas investigadas, así como el ingreso medio y su desviación típica.

En lo sucesivo, cuando hablemos del ingreso nos estaremos refiriendo a lo que hemos definido como variable relevante para nuestro estudio: a cada persona le estamos asignando el ingreso medio por unidad de consumo del hogar al que pertenece.

El ingreso medio que se obtiene para cada una de las 18 subpoblaciones que determina este criterio de clasificación presenta cifras muy dispares: el menor valor, que se da en Extremadura, está en torno a las 660.000 pesetas, alcanzándose el máximo en la Comunidad de Madrid, con un ingreso medio de 1.040.346 pesetas, lo que quiere decir que es superior al de Extremadura en un 57%.

CUADRO 1
DISTRIBUCIÓN DE LA MUESTRA DE LA E.P.F., INGRESO MEDIO Y DESVIACIÓN TÓPICA DEL INGRESO

Comunidad Autónoma	Número de hogares	Número de personas	Ingreso medio	Desviación típica del ingreso
TOTAL	21.155	72.1238	29.656,82	546.742,27
Andalucía	3.674	13.452	703.299,65	533.400,84
Aragón	1.105	3.518	878.577,94	550.434,26
Principado de Asturias	443	1.449	881.185,20	427.945,22
Baleares	429	1.365	982.726,65	534.561,56
Canarias	772	2.879	728.195,01	441.099,00
Cantabria	362	1.2418	61.593,39	479.861,09
Castilla y León	3.162	10.216	853.508,78	514.500,15
Castilla-La Mancha	1.694	5.595	776.311,73	458.717,20
Cataluña	1.644	5.357	976.399,86	538.550,05
Comunidad Valenciana	1.706	5.614	822.530,17	465.439,87
Extremadura	830	2.859	662.768,81	419.772,25
Galicia	1.739	6.140	803.986,30	524.699,56
Madrid	764	2.608	1.040.345,82	926.849,64
Región de Murcia	526	1.899	739.922,60	563.894,51
Navarra	367	1.303	978.214,81	465.106,57
País Vasco	1.360	4.639	988.773,16	587.287,88
La Rioja	357	1.199	1.006.945,80	671.955,90
Ceuta y Melilla	221	790	724.112,62	524.172,77

De acuerdo con este estadístico, las Comunidades Autónomas más desfavorecidas, junto con Extremadura, son Andalucía, Ceuta y Melilla, Canarias, la Región de Murcia y Castilla-La Mancha, todas ellas con ingresos medios que no superan las 800.000 pesetas. Entre las regiones que, de acuerdo a este criterio, podríamos considerar más favorecidas, se encuentran Madrid y la Rioja, que superan la cifra del millón, seguidas de cerca por el País Vasco, Baleares, Navarra y Cataluña. El resto de Comunidades Autónomas se encuentran en una banda central, con ingresos medios situados entre las 800.000 y 900.000 pesetas.

5. ANÁLISIS DE LA DESIGUALDAD

Para analizar el grado de concentración de la distribución de los ingresos, vamos a obtener en primer lugar la curva de Lorenz, para el total de la población estudiada, y para las 18 subpoblaciones que determina la variable Comunidad Autónoma de residencia.

El primer paso a seguir, consiste en ordenar los registros de nuestro fichero de trabajo de forma creciente de acuerdo a la variable ingreso (valor del ingreso por unidad de consumo del hogar al que pertenece la persona). Una vez hecha esta transformación calculamos, para cada una de las diez decilas, la proporción acumulada de ingresos. Los valores de las curvas de Lorenz para el total, y para cada una de las Comunidades Autónomas, se incluyen en el Cuadro 2.

Si exceptuamos Ceuta y Melilla, categoría que presenta una curva de Lorenz muy por debajo de las del resto, las Comunidades Autónomas con comportamiento extremo desde el punto de vista de la desigualdad son Asturias y la Región de Murcia. Asturias es la que presenta una curva de Lorenz que domina a todas las demás, mientras que de acuerdo al criterio de dominancia de Lorenz la Región de Murcia es la Comunidad Autónoma que presenta un mayor grado de desigualdad. En el Gráfico 1. hemos representado las curvas de Lorenz del total de la muestra, de Asturias y de la Región de Murcia.

Para el resto de Comunidades Autónomas en multitud de casos se producen cortes en las curvas de Lorenz, con lo cual habría de recurrir a la noción de dominancia en el sentido Lorenz generalizado. Este es el caso, entre otros, de Andalucía y Extremadura, o bien de Cataluña y la Comunidad Valenciana. De acuerdo a este criterio generalizado se puede decidir que la Comunidad Valenciana presenta una mayor desigualdad que Cataluña, pero en el caso de Andalucía y Extremadura sus curvas generalizadas siguen cruzándose.

Con el fin de disponer de algunos indicadores de desigualdad, se han calculado el índice de Gini, un índice de la familia de Atkinson (cuando toma el valor 1/2) y otro de los denominados índices de Entropía Generalizada (Shorrocks) (para c=1/2), obteniéndose la descomposición aditiva para esta última medida. Los resultados que se han obtenido se exponen en el Cuadro 3.

Si nos fijamos en primer lugar en las regiones con diferencias de rentas más marcadas, de la observación de la mencionada tabla se deduce que por unanimidad es Ceuta y Melilla el área geográfica en donde la distribución de los ingresos es más desigual.

CUADRO 2
VALORES DE LA CURVA DE LORENZ

Comunidades Autónomas	Decila 1	Decila 2	Decila 3	Decila 4	Decila 5
TOTAL	0,033	0,085	0,147	0,218	0,299
Andalucía	0,031	0,080	0,141	0,212	0,293
Aragón	0,039	0,095	0,160	0,235	0,321
Asturias	0,044	0,103	0,172	0,251	0,336
Baleares	0,034	0,089	0,154	0,227	0,310
Canarias	0,030	0,081	0,141	0,212	0,293
Cantabria	0,036	0,090	0,155	0,228	0,311
Castilla y León	0,036	0,089	0,152	0,224	0,305
Castilla la Mancha	0,038	0,090	0,153	0,225	0,306
Cataluña	0,039	0,093	0,157	0,230	0,314
Comunidad Valenciana	0,039	0,094	0,160	0,235	0,318
Extremadura	0,033	0,083	0,144	0,214	0,294
Galicia	0,038	0,092	0,155	0,228	0,311
Madrid	0,037	0,090	0,153	0,224	0,305
Región de Murcia	0,030	0,078	0,138	0,208	0,286
Navarra	0,041	0,098	0,165	0,243	0,329
País Vasco	0,037	0,091	0,156	0,229	0,313
La Rioja	0,037	0,091	0,155	0,227	0,308
Ceuta y Melilla	0,021	0,067	0,123	0,187	0,262

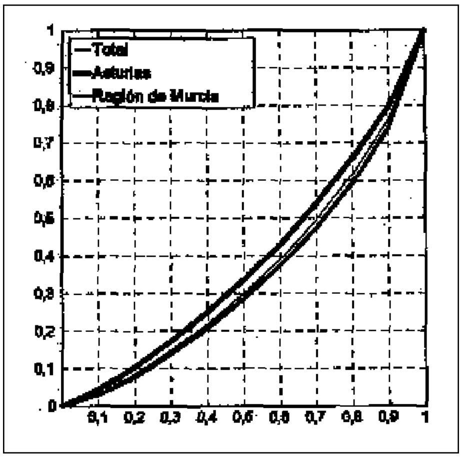
CUADRO 2
VALORES DE LA CURVA DE LORENZ (Continuación)

Comunidades Autónomas	Decila 6	Decila 7	Decila 8	Decila 9	Decila 10
TOTAL	0,391	0,496	0,616	0,764	1,000
Andalucía	0,385	0,488	0,608	0,755	1,000
Aragón	0,415	0,518	0,636	0,778	1,000
Asturias	0,431	0,538	0,659	0,797	1,000
Baleares	0,403	0,509	0,632	0,779	1,000

CUADRO 2
VALORES DE LA CURVA DE LORENZ (Continuación)

Comunidades Autónomas	Decila 6	Decila 7	Decila 8	Decila 9	Decila 10
Canarias	0,385	0,491	0,613	0,765	1,000
Cantabria	0,404	0,510	0,631	0,778	1,000
Castilla y León	0,396	0,498	0,617	0,765	1,000
Castilla la Mancha	0,396	0,500	0,620	0,768	1,000
Cataluña	0,407	0,513	0,635	0,779	1,000
Comunidad Valenciana	0,411	0,515	0,634	0,777	1,000
Extremadura	0,383	0,485	0,605	0,756	1,000
Galicia	0,403	0,507	0,626	0,768	1,000
Madrid	0,394	0,494	0,610	0,754	1,000
Región de Murcia	0,375	0,475	0,593	0,742	1,000
Navarra	0,423	0,529	0,651	0,798	1,000
País Vasco	0,407	0,511	0,632	0,776	1,000
La Rioja	0,397	0,498	0,614	0,758	1,000
Ceuta y Melilla	0,349	0,452	0,580	0,733	1,000

FIGURA 1
CURVAS DE LORENZ



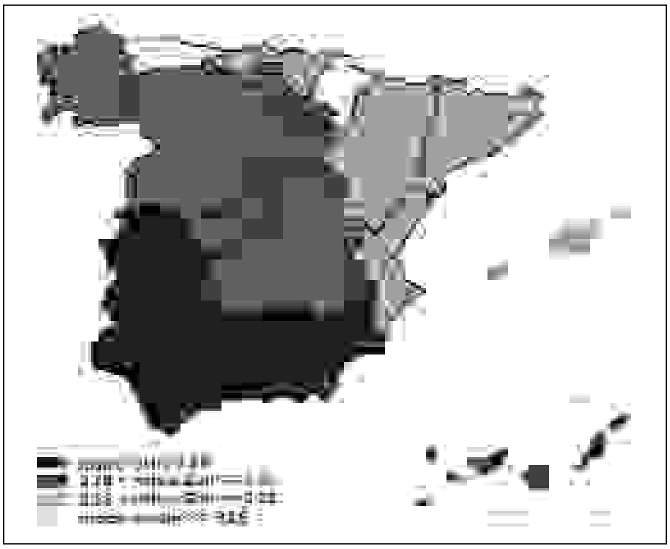
Si excluimos Ceuta y Melilla pues, al igual que ocurría con la curva de Lorenz marca diferencias importantes en los valores de los índices de desigualdad con respecto al resto del Estado, es la Región de Murcia la Comunidad Autónoma donde están peor distribuidos los ingresos.

A parte de la Región de Murcia, el grupo de Comunidades Autónomas donde se alcanza mayor magnitud en las medidas de desigualdad estaría compuesto por Andalucía, Extremadura y Canarias, que son también las áreas geográficas donde se obtenía menor valor medio de la variable ingreso (Ver Cuadro 1).

CUADRO 3
ÍNDICES DE DESIGUALDAD POR COMUNIDADES AUTÓNOMAS.

Comunidad Autónoma	Índice de Gini	Índice de Atkinson = 1/2	Índice de Shorrocks c = 1/2
TOTAL	0,29649	0,07323	0,14924
Andalucía	0,30885	0,08116	0,16575
Aragón	0,26722	0,06145	0,12485
Principado de Asturias	0,23881	0,04710	0,09534
Baleares	0,27869	0,06453	0,13120
Canarias	0,30360	0,07578	0,15455
Cantabria	0,27809	0,06569	0,13360
Castilla y León	0,29009	0,06906	0,14059
Castilla-La Mancha	0,28710	0,06683	0,13592
Cataluña	0,27253	0,06067	0,12324
Comunidad Valenciana	0,26919	0,06019	0,12224
Extremadura	0,30738	0,07702	0,15713
Galicia	0,28122	0,06642	0,13513
Madrid	0,29535	0,07733	0,15778
Región de Murcia	0,32230	0,08682	0,17758
Navarra	0,24960	0,04990	0,10107
País Vasco	0,27561	0,06343	0,12894
La Rioja	0,29067	0,07159	0,14585
Ceuta y Melilla	0,35322	0,10397	0,21364
Desviación dentro subgrupos.			0,14092
Desviación entre subgrupos			0,00831

FIGURA 2
ÍNDICE DE GINI POR COMUNIDADES AUTÓNOMAS



De entre las regiones donde es más equitativa la distribución de los ingresos personales destacan sobre todas ellas Asturias y Navarra. También podríamos incluir en este grupo a Aragón, la Comunidad Valenciana, el País Vasco, Cataluña, Cantabria y Baleares, categorías para las que se obtienen valores para los distintos índices considerados bastante inferiores a los niveles que se tienen para el total nacional. Si bien estas últimas Comunidades Autónomas tienen todas ellas niveles medios de ingresos superiores a la media, el estadístico ingreso medio alcanza su mayor valor en Madrid y La Rioja, regiones para las que sin embargo, se obtienen grados de desigualdad que se sitúan en torno a la media nacional o superiores.

Los resultados que hemos obtenido no discrepan sustancialmente de los que presenta el estudio que ha publicado el Instituto Nacional de Estadística, a pesar de haber considerado variables distintas para el cálculo de las medidas de desigualdad.

Si nos fijamos en los resultados de este estudio, considerando la variable ingreso total per cápita del hogar, para las encuestas de presupuestos familiares 73-74 y 80-81, vemos que se presentan importantes cambios frente a lo que hemos obtenido en este trabajo con datos referentes a la EPF 90-91.

Quizás el caso más llamativo lo represente la Región de Murcia. Como ya hemos señalado, con excepción de Ceuta y Melilla, es la Comunidad Autónoma que presenta mayor valor para los tres tipos de índices de desigualdad considerados. Sin embargo, no siempre ha sido así. En el estudio de P. Martín-Guzmán y otros, con datos de la EPF 73-74, siete Comunidades Autónomas presentaban mayor índice de desigualdad de Gini que la Región de Murcia. Esta situación incluso mejora para el período 80-81, pues en ese momento eran diez las regiones con una distribución de la renta menos equitativa que Murcia. Tomando como criterio de desigualdad la medida de Atkinson, para =1/2, solo País Vasco y La Rioja presentaban rentas mejor distribuidas que la Región de Murcia, diez años atrás.

Andalucía, Extremadura y Canarias, que componen junto a la Región de Murcia, el grupo de regiones con una distribución de la renta más desigual según nuestro estudio, ocupaban en el período 80-81 una situación relativa muy similar.

De entre las Comunidades Autónomas con una menor concentración en la distribución de los ingresos personales, destacaríamos los casos de Aragón, la Comunidad Valenciana y Baleares. Su situación en el período 90-91 frente a la de la EPF 80-81 ha mejorado ostensiblemente. Así, en el caso de la Comunidad Valenciana, había en ese período tan solo tres regiones que presentaban una mayor desigualdad, mientras que según nuestro estudio ese número asciende ya a trece; solo Asturias, Navarra y Aragón tienen un índice de Gini menor.

6. ESTIMACIÓN DE MEDIDAS DE DESIGUALDAD

En nuestro caso, al disponer de información de la muestra de la Encuesta de Presupuestos Familiares desagregada, hemos podido proceder a un estudio completo de la desigualdad sin más que aplicar las versiones discretas de una serie de medidas de desigualdad. Aunque ya hemos obtenido los valores para dichos índices, nos planteamos el ejercicio de ajustar a nuestra distribución empírica una forma funcional continua, y a partir de aquí obtener las medidas de desigualdad. A continuación se trataría de ver si los índices calculados tomando como base los datos de la muestra se aproximan suficientemente a aquellos.

Si bien la distribución que hemos elegido para ajustar los datos empíricos es la gamma biparamétrica, antes de decidirnos por ella hemos realizado un análisis gráfico de la distribución muestral. Las curvas que mejor podrían aproximarse a nuestra realidad empírica serían las que representan a las distribuciones lognormal, Weibull y gamma. Se ha realizado el ajuste de estos tres modelos, obteniendo, previamente, los estimadores máximo verosímiles de sus parámetros (y ^{2} para la lognormal, y para el modelo Weibull, p y a para la gamma).

Aplicando el test de Kolmogorov-Smirnov, hemos observado que de las tres distribuciones analizadas únicamente con la gamma biparamétrica podemos aceptar la hipótesis de que los datos originales provengan de una población así distribuida, a un nivel de significación del 5 %.

Los estimadores máximo-verosímiles de los parámetros p y a de la distribución gamma se obtienen como solución del sistema de ecuaciones no lineales (1) que expresamos en el apartado 2.

Se ha resuelto dicho sistema no lineal por métodos iterativos, elaborando una tabla de posibles soluciones. Dichos resultados se presentan en el Cuadro 4.

CUADRO 4
RELACIÓN ENTRE EL COCIENTE DE LA MEDIA ARITMÉTICA Y GEOMÉTRICA Y DISTINTAS MEDIDAS DE DESIGUALDAD

$\bar{Y} / \tilde{Y}$	$\hat{p}$	Índice de Gini	Índice de Atkinson = 1/2	Índice de Shorrocks c = 1/2
1,100	5,40719	0,237091	0,045115	0,091272
1,105	5,16863	0,242242	0,047151	0,095440
1,110	4,95172	0,247230	0,049158	0,099556
1,115	4,75364	0,252065	0,051143	0,103628
1,120	4,57203	0,256758	0,053093	0,107634
1,125	4,40491	0,261312	0,055056	0,111671
1,130	4,25061	0,265740	0,056992	0,115656
1,135	4,10771	0,270047	0,058918	0,119626
1,140	3,97499	0,274242	0,060808	0,123524
1,145	3,85139	0,278329	0,062686	0,127401
1,150	3,73600	0,282315	0,064544	0,131241
1,155	3,62803	0,286203	0,066380	0,135039
1,160	3,52679	0,290001	0,068188	0,138784
1,165	3,43165	0,293704	0,070022	0,142586

CUADRO 4

RELACIÓN ENTRE EL COCIENTE DE LA MEDIA ARITMÉTICA Y GEOMÉTRICA Y DISTINTAS MEDIDAS DE DESIGUALDAD (Continuación)

$\bar{Y} / \tilde{Y}$	$\hat{p}$	Índice de Gini	Índice de Atkinson = 1/2	Índice de Shorrocks c = 1/2
1,170	3,34209	0,297326	0,071818	0,146312
1,171	3,32480	0,298041	0,072175	0,147054
1,172	3,30771	0,298752	0,072532	0,147795
1,173	3,29082	0,299460	0,072888	0,148535
1,174	3,27412	0,300165	0,073244	0,149274
1,175	3,25762	0,300867	0,073599	0,150011
1,180	3,17782	0,304330	0,075367	0,153686
1,185	3,10231	0,307719	0,077123	0,157340
1,190	3,03076	0,311035	0,078869	0,160978
1,195	2,96285	0,314290	0,080565	0,164512
1,200	2,89833	0,317475	0,082266	0,168063
1,205	2,83693	0,320597	0,083952	0,171585
1,210	2,77843	0,323659	0,085624	0,175079
1,215	2,72264	0,326662	0,087279	0,178543
1,220	2,66937	0,329609	0,088920	0,181979
1,230	2,56972	0,335342	0,092153	0,188759
1,240	2,47832	0,340867	0,095357	0,195492
1,250	2,39417	0,346203	0,098497	0,202099
1,260	2,31643	0,351361	0,101586	0,208612
1,265	2,27975	0,353876	0,103112	0,211833
1,270	2,24441	0,356350	0,104626	0,215032

En dicha tabla se incluyen para distintos valores del cociente entre las medias aritmética y geométrica, el correspondiente valor del estimador máximo verosímil de p. El estimador máximo-verosímil del parámetro a se calcularía simplemente dividiendo el estimador de p por la media aritmética de la distribución considerada.

El cuadro se completa con los valores que se obtienen para la distribución gamma, con el mencionado parámetro p, de los índices de Gini, Atkinson (=1/2) y de Entropía Generalizado (c=1/2).

Para poder construir el Cuadro 4, hemos tenido que obtener previamente aproximaciones de las funciones gamma y digamma.

La función digamma, necesaria para poder resolver el sistema de ecuaciones no lineales, es, por definición, la derivada del logaritmo neperiano de la función gamma. Con el fin de poder calcular la función digamma para valores p reales y positivos ha sido necesario hacer uso del desarrollo en serie siguiente:

$$(x) = - C - \frac{1}{x} + \sum_{k=1} \frac{1}{k(x+k)}$$

donde C=0,5772156649 es la constante de Euler.

La función gamma, como ya sabemos, se define:

$$(p) = \quad e^{-t}\, t^{p-1}\, dt$$

Pues bien, para poder calcular los valores de la función gamma para las distintas soluciones del sistema de ecuaciones no lineales, que nos permitan a su vez obtener los índices de desigualdad señalados, hemos hecho uso de la representación asintótica, para valores grandes de   p

$$(p) = p^{p-\frac{1}{2}}\ e^{-p}\quad 2 \quad \left\{1+\frac{1}{12p}+\frac{1}{288p^2}-\frac{139}{51840p^3}-\frac{571}{2488320p^4}+O(p^{-5})\right\}$$

Recordemos que el índice de Gini para la distribución gamma tenía la forma

$$G(y) = \frac{\left(p+\frac{}{2}\right)}{}$$

El índice de Atkinson, para un coeficiente de aversión a la desigualdad =1/2, y para la distribución gamma biparamétrica, toma la forma:

$$A_{1/2}(y) = 1 - \frac{1}{\ } \left[\frac{\left(p+\frac{}{2}\right)}{\ } \right]^2$$

Hay que hacer notar, como ya se señaló en su momento, que el coeficiente de aversión a la desigualdad sólo puede tomar valores pertenecientes al intervalo [0,p+1). En esta situación se encuentra el valor que hemos considerado (=1/2), pues el rango de valores de p que se tiene en el Cuadro 4. está comprendido entre 2,24441, y 5,40719.

En cuanto a la expresión de la medida de desigualdad de entropía generalizada para la distribución gamma biparamétrica y para los valores que se han calculado (c=1 y c=1/2) es la siguiente:

$$S_{1/2} = -4 \left[\frac{\left(p+\frac{}{2}\right)}{(p)} - 1 \right]$$

$$S_1(y) = T_1(y) = \frac{1}{p} + \quad (p) - \text{Lnp}$$

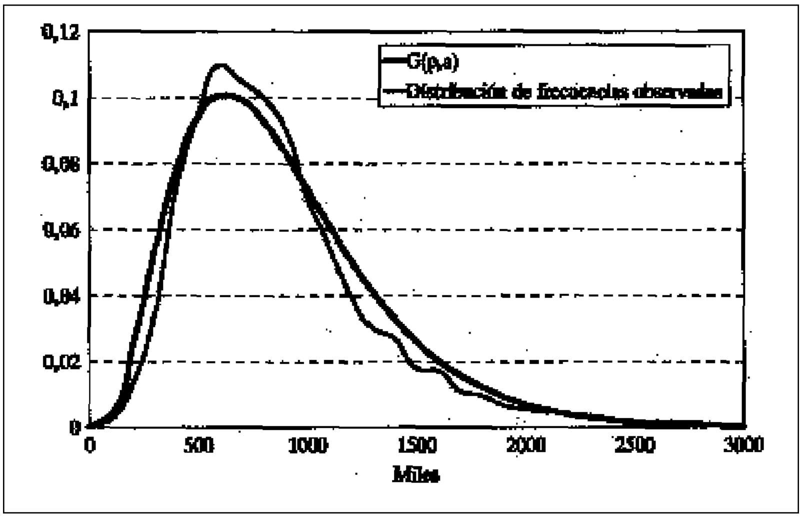
Como se puede observar, las fórmulas que se han expuesto de los índices de desigualdad no dependen para nada del parámetro a. Esto se debe a que las medidas de desigualdad de Gini, Atkinson y de Entropía Generalizada son invariantes frente a cambios de escala.

En consecuencia, para poder elaborar el Cuadro 4 ha sido necesario calcular para cada p, el valor de la función digamma en dicho punto, así como los valores (p), (p+0,5) y (p+1).

Haciendo uso del Cuadro 4 de soluciones del sistema (1) hemos determinado los estimadores máximo verosímiles de los parámetros p y a para el total de la muestra y para cada uno de los 18 subconjuntos que determina la Comunidad Autónoma de residencia. El siguiente paso consiste en determinar si podemos aceptar la hipótesis de que las 19 distintas distribuciones empíricas provienen de poblaciones que se distribuyen según una gamma de parámetros las estimaciones obtenidas por ese método.

En la Figura 3 hemos representado la función de densidad de la distribución gamma de parámetros p=3,3248 y a=0,00000401 (que son los estimadores máximo verosímiles para el total) junto con la distribución de frecuencias observadas para el total de la muestra. De la observación de las dos líneas podríamos deducir, casi con seguridad, que el ajuste es óptimo.

FIGURA 3
FUNCIÓN DE DENSIDAD DE LA G(3,3248,0;00000401) Y DISTRIBUCIÓN DE FRECUENCIAS OBSERVADAS



Pues bien, utilizando el test de Kolmogorov-Smirnov hemos obtenido que para todos los casos se puede aceptar la hipótesis de que provengan de poblaciones distribuidas según una gamma, a un nivel de significación del 5%. En el Cuadro 5 se incluyen los valores que se han obtenido para el total y para cada una de las 18 Comunidades Autónomas, del estadístico Dn de Kolmogorov-Smirnov, junto con los distintos valores D (para un nivel de significación de =0,05), que representa al cuantil de orden 1- de la distribución de Dn. En todos los casos es menor el valor del estadístico de K-S que su correspondiente D .

CUADRO 5
VALOR DEL ESTADÍSTICO DE KOLMOGOROV-SMIRNOV POR COMUNIDAD AUTÓNOMA DE RESIDENCIA

Comunidad Autónoma	$\hat{p}$	$\hat{a}$	Estadístico de Kolmogorov-Smirnov	D
TOTAL	3,32480	0,00000401	0,00473	0,00506
Andalucía	2,96285	0,00000421	0,01097	0,01173
Aragón	3,97499	0,00000452	0,01975	0,02293
Principado de Asturias	5,16863	0,00000587	0,03466	0,03573
Baleares	3,73600	0,00000380	0,03321	0,03681
Canarias	3,17782	0,00000436	0,02348	0,02535
Cantabria	3,73600	0,00000434	0,03649	0,03861
Castilla y León	3,52679	0,00000413	0,01258	0,01346
Castilla-La Mancha	3,62803	0,00000467	0,01809	0,01818
Cataluña	3,97499	0,00000407	0,01740	0,01858
Comunidad Valenciana	3,97499	0,00000483	0,01672	0,01815
Extremadura	3,10231	0,00000468	0,02073	0,02544
Galicia	3,62803	0,00000451	0,01560	0,01736
Madrid	3,17782	0,00000305	0,02043	0,02663
Región de Murcia	2,72264	0,00000368	0,02985	0,03121
Navarra	4,95172	0,00000506	0,03581	0,03768
País Vasco	3,85139	0,00000390	0,01926	0,01997
La Rioja	3,34209	0,00000332	0,03881	0,03928
Ceuta y Melilla	2,24441	0,00000310	0,04292	0,04839

En el Cuadro 6 presentamos por Comunidades Autónomas, los valores de los estimadores máximo-verosímiles del parámetro p de la gamma, junto con los índices de Gini, Atkinson (=1/2) y Shorrocks (c=1/2), representando los valores estimados por este método, los valores muestrales y los errores relativos.

Podemos observar que el valor obtenido para el estimador máximo verosímil de p es mayor en Asturias y Navarra, y más pequeño en la Región de Murcia y Ceuta y Melilla. Esto se traduce en que estas dos áreas geográficas son las que presentan un mayor valor para los tres índices de desigualdad considerados, al igual que obtuvimos al aplicar a los datos muestrales las versiones discretas de las mismas medidas. Las Comunidades Autónomas en las que se da una mayor equidad en la distribución de sus ingresos son Asturias y Navarra, con bastantes diferencias con respecto al resto de regiones.

Como vemos, los índices de desigualdad son funciones decrecientes de los valores de p: cuanto mayor es p, menor resultado se obtiene para estas medidas.

Si observamos en el Cuadro 6 los errores relativos que se obtienen para las distintas Comunidades Autónomas, podemos concluir que es Madrid la que presenta mayor discordancia entre valores muestrales y teóricos, si bien la magnitud de estos errores no supera en ningún caso el 3%.

En el mismo trabajo donde se obtienen las expresiones de los índices de Atkinson y de Entropía Generalizada (Lafuente M. (1995)), se presentan los intervalos de confianza para estas dos familias.

Haciendo uso de dichas fórmulas se han obtenido los intervalos de confianza, al 1% de significación, para los tres tipos de índices considerados, obteniéndose para todos ellos que sus valores muestrales se encuentran en el interior del intervalo de confianza respectivo.

7. CONCLUSIONES

Los ingresos medios que se obtienen para las distintas Comunidades Autónomas presentan cifras muy dispares: el mayor valor, registrado en la Comunidad de Madrid, es un 57% superior al menor, que se da en Extremadura. De acuerdo con este estadístico, las Comunidades Autónomas más desfavorecidas, junto con Extremadura, son Andalucía, Ceuta y Melilla, Canarias, la Región de Murcia y Castilla-La Mancha. Las regiones que presenta mayor ingreso medio son la Comunidad de Madrid y La Rioja.

Al calcular las curvas de Lorenz para la totalidad del Estado Español y para cada una de las Comunidades Autónomas, se observa que si exceptuamos Ceuta y Melilla (categoría que tiene una curva de Lorenz muy por debajo de las del resto), la Comunidad Autónoma que presenta una mayor desigualdad es la Región de Murcia, frente al Principado de Asturias que domina a todas las demás. Este mismo comportamiento se observa al calcular las distintas medidas de desigualdad analizadas en este trabajo. Si nos fijamos en el índice de Gini, por ejemplo, observamos como, a parte de la Región de Murcia, las Comunidades Autónomas para las que se presenta mayor valor, y por tanto existe una mayor desigualdad, son Andalucía, Extremadura y Canarias, que son también las áreas geográficas donde el ingreso medio es menor. Las regiones que presentan mayor equidad son Asturias y Navarra.

CUADRO 6

ÍNDICES DE DESIGUALDAD TEÓRICOS Y MUESTRALES POR COMUNIDAD AUTÓNOMA

Comunidades Autónomas	Est. máx. veros. de p	Índice de Gini			Índice de Atkinson a=1/2			Índice de Shorrocks c=1/2		
		Valor muestrall	Valor teórico	Error relativo	Valor muestral	Valor teórico	Error relativo	Valor muestrall	Valor teórico	Error relativo
TOTAL	3,32480	0,29649	0,29804	-0,52	0,07323	0,07218	1,46	0,14924	0,14705	1,48
Andalucía	2,96285	0,30885	0,31429	-1,73	0,08116	0,08057	0,74	0,16575	0,16451	0,75
Aragón	3,97499	0,26722	0,27424	-2,56	0,06145	0,06081	1,06	0,12485	0,12352	1,07
Asturias	5,16863	0,23881	0,24224	-1,41	0,04710	0,04715	-0,10	0,09534	0,09544	-0,10
Baleares	3,73600	0,27869	0,28232	-1,28	0,06453	0,06454	-0,03	0,13120	0,13124	-0,03
Canarias	3,17782	0,30360	0,30433	-0,24	0,07578	0,07537	0,55	0,15455	0,15369	0,56
Cantabria	3,73600	0,27809	0,28232	-1,50	0,06569	0,06454	1,77	0,13360	0,13124	1,80
Castilla y León	3,52679	0,29009	0,29000	0,03	0,06906	0,06819	1,28	0,14059	0,13878	1,30
Castilla-La Mancha	3,62803	0,28710	0,28620	0,31	0,06683	0,06638	0,68	0,13592	0,13504	0,65
Cataluña	3,97499	0,27253	0,27424	-0,62	0,06067	0,06081	-0,22	0,12324	0,12352	-0,23
Com. Valenciana	3,97499	0,26919	0,27424	-1,84	0,06019	0,06081	-1,02	0,12224	0,12352	-1,04
Extremadura	3,10231	0,30738	0,30772	-0,11	0,07702	0,07712	-0,13	0,15713	0,15734	-0,14
Galicia	3,62803	0,28122	0,28620	-1,74	0,06642	0,06638	0,07	0,13513	0,13504	0,07
Madrid	3,17782	0,29535	0,30433	-2,95	0,07733	0,07537	2,61	0,15778	0,15369	2,66
Región de Murcia	2,72264	0,32230	0,32666	-1,34	0,08682	0,08728	-0,53	0,17758	0,17854	-0,54
Navarra	4,95172	0,24960	0,24723	0,96	0,04990	0,04916	1,51	0,10107	0,09956	1,52
País Vasco	3,85139	0,27561	0,27833	-0,98	0,06343	0,06269	1,19	0,12894	0,12740	1,21
La Rioja	3,34209	0,29067	0,29733	-2,24	0,07159	0,07182	-0,31	0,14585	0,14631	-0,32

El estudio elaborado por P. Martín-Guzman y otros, que toma la misma información de base, llega a conclusiones similares aún cuando la variable considerada sea distinta: aquí utilizan tanto el ingreso como el gasto por habitante, mientras que nosotros hemos empleado el ingreso por unidad de consumo.

Comparando los resultados que hemos obtenido en este trabajo para el período 90-91, con los que se deducen del estudio ya mencionado de P. Martín-Guzmán y otros, considerando la variable ingreso total per cápita del hogar, para las EPF 73-74 y 80-81, se observa que la Región de Murcia en esos dos períodos se encontraba entre las áreas geográficas con una distribución de renta más equitativa, para sin embargo pasar a ocupar el último lugar según se desprende de nuestro trabajo. El cambio más llamativo en el otro sentido lo protagoniza la Comunidad Valenciana: solo tres Comunidades Autónomas presentaban una desigualdad mayor en el período 80-81, mientras que de los datos de la EPF 90-91 se deduce que ahora solo tres regiones se encuentran en una situación más favorable desde este punto de vista.

Si bien no surgió la distribución gamma biparamétrica como un modelo para analizar la distribución de la renta, hay suficientes razones para considerarla una seria candidata para ajustar este tipo de distribuciones. A una sencilla y clara interpretación de sus parámetros, frente a modelos de más parámetros, que aunque pudieran tener mejor ajuste, sus expresiones son más complejas, se une el hecho de que según trabajos empíricos anteriores esta distribución parece ajustarse mejor que otros modelos biparamétricos propuestos.

En nuestro estudio, antes de decidirnos por la distribución gamma biparamétrica, hemos realizado un análisis gráfico de la distribución muestral, lo que nos permitió decidirnos por tres candidatas: las distribuciones lognormal, Weibull y gamma. Aplicando el test de Kolmogorov-Smirnov, se observa que de estas tres distribuciones únicamente con la gamma biparamétrica podemos aceptar la hipótesis de que los datos originales provengan de una población así distribuida, a un nivel de significación del 5%.

A continuación, se han calculado los valores estimados del índice de Gini, de Atkinson (=1/2) y de Entropía Generalizada (c=1/2), llegándose a la conclusión que los resultados obtenidos con los índices estimados y con las versiones discretas de ellos son los mismos, lo que ha sido constatado empíricamente, pues se ha comprobado que los valores muestrales de los índices caen dentro de los correspondientes intervalos de confianza.

Todos estos argumentos nos llevan a concluir que la distribución gamma es el modelo biparamétrico que mejor se ajusta a la distribución de la renta que se deduce de los datos de la Encuesta de Presupuestos Familiares 90-91.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ATKINSON, A.B. (1970): "On the Mesaurement of Inequality". *Journal of Economics Theory,* 2; 244-263.

CHAKRAVARTY, S.R. (1990): *Ethical social index numbers.* Springer-Verlag Berlin. Heidelberg.

COWELL, F.A. y K. KUGA (1981): "Inequality measurement; An axiomatic approach". *European Economic Review,* 15; 287-305.

DAGUM, C. (1977): "A new model of personal income distribution: specification and estimation". *Economic Appliquee,* 30 (3); 413-436.

DAGUM, C. (1980a): "Inequality measures between income distributions with applications". *Econometrica,* 48 (7); 1791-1803.

DAGUM, C. (1980b): "The generation and distribution of income, the Lorenz curve and the Gini ratio". *Economie Appliquée,* 33 (2); 327-367.

DAGUM, C. (1983): "Income distribution models", en *Kotz, S. & Johnson,* N.L. (1983) Vol. 4; 27-34.

DAGUM, C. (1989): "Generation and properties of income distribution functions", en *Dagum y Zenga,* M.; 1-17.

DAGUM, C. y M. ZENGA (1989): *Income and wealth distribution, inequality and poverty.* Springer-Verlag.

ESTEBAN, J. (1986): "Income-share elasticity and the size distribution of income". *International Economic Review,* 27 (2); 439-444.

GASTWIRTH, J.L. (1971): "A general definition of the Lorenz curve". *Econometrica,* 39 (6); 1037-1039.

INSTITUTO NACIONAL DE ESTADÍSTICA (1992): *Encuesta de Presupuestos Familiares.* 1990/91. *Metodología.*

JOHNSON, N.L. y S. KOTZ (1970a): *Continuous univariate distributions-I.* Ed. John Wiley & Sons. New York.

JOHNSON, N.L. y S. KOTZ (1970b): *Continuous univariate distributions-II.* Ed. John Wiley & Sons. New York.

KAKWANI, N.C. (1980): *Income inequality and poverty* Oxford Univerty Press.

LAFUENTE, M. (1994): "Medidas de cuantificación de la desigualdad: la desigualdad de la renta en España según la E.P.F. 1990-91". Tesis Doctoral. Universidad de Murcia.

LAFUENTE, M. (1995): "Dos familias de medidas de desigualdad y la distribución gamma". *Estadística Española,* 37 (139); 239-260

MARTIN, G., A. FERNANDEZ, A. GARCIA y J. DE HARO (1993): "Evolución de la desigualdad y la pobreza en la distribución de la renta familiar en España (1985. I - 1991. II)". *VII Reunión de ASEPELT-ESPAÑA.*

MARTÍN-GUZMÁN, P. y Otros (1996): *Encuesta de Presupuestos Familiares. Desigualdad y pobreza en España. Estudio basado en las Encuestas de Presupuestos Familiares de 1973-74, 1980-81 y 1990-91.* Instituto Nacional de Estadística.

McDONALD, J.B. y B.C. JENSEN (1979): "An analysis of some properties of alternative measures of income inequality based on the gamma distribution". *Journal of the American Statistical Association,* 74 (368); 856-860.

RUIZ-CASTILLO, J. (1986): "Problemas conceptuales en la medición de la desigualdad". *Hacienda Pública Española,* 101; 17-31.

RUIZ-CASTILLO, J. (1987): *La medición de la pobreza y de la desigualdad en España, 1980-81.* Banco de España. Servicio de Estudios. Estudios Económicos, 42.

SEN, A. (1973): *On Economic Inequality.* Oxford University Press.

SHORROCKS, A.F. (1980): "The class of additively decomposable inequality measures". *Econometrica,* 48 (3); 613-625.

THEIL, H. (1967): *Economics and information theory.* North-Holland publishing Company - Amsterdam. Cap. 4; 91-134.

ZUBIRI, I. (1985): "Una introducción al problema de la medición de la desigualdad". *Hacienda Pública Española,* 92; 291-317.

Recibido, 15 de Abril de 1997; Aceptado, 9 de Enero de 1998.