REVISTA DE ESTUDIOS REGIONALES Nº 72, I.S.S.N.: 0213-7585 (2005), PP. 191-211

Reasignación de contenedores de vidrio en los municipios asturianos

Gabriel Villa
Sebastián Lozano
Universidad de Sevilla
Berlarmino Adenso-Díaz
Universidad de Oviedo

Recibido, Noviembre de 2003; Versión final aceptada, Septiembre de 2004.

PALABRAS CLAVE: Análisis por Envoltura de Datos, reasignación centralizada de recursos.

KEYWORDS: Data Envelopment Analysis, centralised resource reallocation.

RESUMEN

Este trabajo estudia una aplicación del Análisis por Envoltura de Datos (DEA) para analizar el funcionamiento de los municipios asturianos en términos de la cantidad de vidrio reciclado. Las entradas son el número de contenedores de vidrio asignados a cada municipio, la población y el número de bares y restaurantes establecidos. Se usa una orientación de salida agregada, es decir, el modelo utilizado sólo requerirá que en la solución no se exceda el total de contenedores existentes. El objetivo de la autoridad regional será asignar los contenedores disponibles para maximizar el total de vidrio reciclado por todos los municipios.

ABASTRACT

This paper presents an application of Data Envelopment Analysis (DEA) for analysing the performance of a number of Asturian municipalities in terms of the amount of glass recycled. The inputs considered are the number of glass containers assigned to each municipality, the population and the number of bars and restaurants in town. An aggregated-output orientation is used, that is, the model only requires that the total number of existing containers not be exceeded. The goal of the regional authority is to assign the available containers so as to maximise the total amount of glass recycled by all the municipalities.

1 INTRODUCCIÓN

En este trabajo se describe una aplicación que analiza la eficiencia del funcionamiento de los municipios asturianos en términos de la cantidad de vidrio reciclado. Los municipios de cualquier Comunidad Autónoma poseen recursos para la gestión de ciertas actividades que son proporcionados y controlados por la autoridad regional competente. En estos casos es útil preguntarse cómo debería la Administración Central asignar los recursos que aporta a dichos municipios para que su comportamiento mejorara tanto en el aspecto individual (aumento de la eficiencia) como desde un punto de vista global. En nuestro problema, la Autoridad Regional es poseedora de los contenedores de vidrio que reparte a los municipios y, por lo tanto, puede reasignarlos de la forma que mejor convenga al conjunto. La importancia de este análisis radica en el hecho de que, con una simple reasignación de los recursos, pueden mejorarse los resultados globales del conjunto de municipios. En el caso que se tratará en este trabajo, asignar más contenedores a unos municipios en detrimento de otros, reportará mayores cantidades de kilogramos de vidrio reciclado en la totalidad de la región.

La metodología de reasignación centralizada de recursos que se ha aplicado para la resolución de este problema es general y proporciona un enfoque más adecuado en todos aquellos casos en los que las unidades a evaluar pertenecen o dependen de una misma organización.

2 MODELO DEA DE REASIGNACIÓN CENTRALIZADA DE RECURSOS

Para resolver el problema que ha sido expuesto en el anterior apartado, se van a desarrollar modelos matemáticos novedosos que están basados en una conocida herramienta de programación lineal que se usa para medir la eficiencia relativa de unidades productivas que fabrican de forma similar: el Análisis por Envoltura de Datos (DEA).

La metodología DEA parte para su resolución del conocimiento de la cantidad de los recursos consumidos (inputs o entradas) por cada unidad y de la cantidad de las producciones generadas (outputs o salidas) por cada unidad. A las unidades productivas se les denomina DMUs (Decision Making Units) haciendo referencia al hecho de que tienen libertad para modificar la cantidad de sus entradas y salidas.

DEA requiere de un primer paso que sería la definición del conjunto de posibilidades de producción del problema, esto es, identificar los posibles puntos de operación admisibles. Las dos alternativas más frecuentes son las tecnologías denominadas Rendimientos a Escala Constantes[1], ver Charnes et al. (1978), y Rendimientos a Escala Variables[2], ver Banker et al. (1984). La primera de las tecnologías considera como punto de operación admisible dentro del problema cualquier combinación lineal de las DMUs observadas, mientras que en la tecnología de rendimientos a escala variables sólo se consideran admisibles las combinaciones lineales convexas.

1. Constant Return to Scale o CRS, en nomenclatura anglosajona.
2. Variable Return to Scale o VRS, en nomenclatura anglosajona.

Un segundo paso consiste en la selección del modelo DEA adecuado al problema a resolver. Existen multitud de modelos DEA, todos ellos con el mismo objetivo: encontrar para cada DMU un punto admisible de mayor eficiencia con el que pueda compararse. De esta forma, dada una cierta DMU_J, se formula un modelo de programación lineal que busca una combinación lineal (convexa en el caso VRS) de las DMUs existentes, que usen menos entradas que la DMU_J y/o produzca más salidas que la DMU_J. Si ningún punto domina a DMU_J, entonces dicha unidad es eficiente (técnicamente eficiente en el caso de VRS). Si por el contrario la DMU_J no es eficiente, el modelo la proyecta sobre la frontera eficiente y mide la eficiencia de la DMU_J en términos de reducción del consumo de las entradas e incremento en la producción de salida.

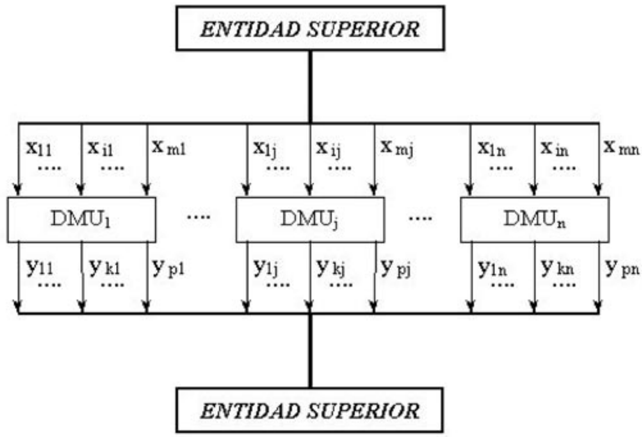
Hay diferentes maneras de realizar la proyección y medición de la distancia entre la DMU_0 y el punto sobre el que se proyecta. Así, la orientación de entrada consiste en reducir tanto como sea posible todas las entradas de forma equi-proporcional sin reducir las salidas. Por otra parte, la orientación de salida consiste en incrementar tanto como sea posible las salidas de forma equi-proporcional sin un incremento de las entradas.

Definida la tecnología y la orientación de un problema, queda definido el modelo DEA a utilizar para resolverlo. Así, los modelos que resuelven problemas con rendimientos a escala constantes se denominan de tipo CCR (debido a sus autores Charnes, Cooper y Rhodes, 1978), mientras que aquéllos que resuelven problemas con rendimientos a escala variables son denominados de tipo BCC (también por sus autores Banker, Charnes y Cooper, 1984). Ambos tipos de modelos constan de dos variantes, en función de si el problema presenta orientación de entrada (CCR-I y BCC-I), u orientación de salida (CCR-O y BCC-O).

Una exposición más amplia del estudio sobre la metodología está disponible en Cooper et al. (2000).

En este trabajo se expone una situación en donde existe un sometimiento de las unidades individuales en su comportamiento de cara al objetivo del sistema como un todo, hecho que se denomina reasignación centralizada de recursos. Por tanto, el único y real decisor en el problema es la Entidad Superior responsable del conjunto de DMUs. Este tipo de razonamiento es el más apropiado en el sector público, y en ocasiones también en el sector privado, cuando la estructura de la organización se compone de muchas unidades (municipios, departamentos, oficinas...) dependientes de una misma Entidad Superior que es la encargada del buen funcionamiento del conjunto y que es la que reparte los recursos y se apropia de las producciones de las unidades productivas, como puede observarse en la Figura 1.

FIGURA 1
REPRESENTACIÓN DEL PROBLEMA DE REASIGNACIÓN CENTRALIZADA DE RECURSOS



Fuente: Elaboración propia.

En su formulación tradicional, DEA no se plantea el problema de reasignación centralizada de recursos que se usa en este trabajo, por lo que habrá que modificar dicha formulación apropiadamente. Concretamente, el modelo que se propone difiere de los modelos DEA convencionales en que las DMUs del problema no son proyectadas sobre la frontera eficiente de forma independiente, sino de forma conjunta. Por tanto el objetivo (por ejemplo en el caso de orientación de salida) ya no será la amplificación individual de las salidas de cada DMU, sino del total de la producción generada por todas las unidades en conjunto.

Varios autores han estudiado el caso en el que las DMUs en el problema son tratadas de una forma conjunta. Así, en Golany et al. (1993) se presenta un modelo DEA con una orientación de entrada agregada y no radial. Hay que decir que la función objetivo en este caso es heurística y de difícil interpretación. Golany y Tamir (1995) proponen un modelo DEA con orientación de salida que incluye restricciones que imponen cotas superiores sobre el consumo total en la solución obtenida. Athanassopoulos (1995) presenta un modelo de programación por objetivos (Go-DEA) para un plan centralizado en donde se plantea una serie de modelos DEA independientes que buscan objetivos a cumplir sobre el total consumido en cada entrada y sobre el total de producción generada para cada salida. Posteriormente, en Athanassopoulos (1998) se propone también un modelo de programación por objetivos que minimiza con la mayor prioridad las desviaciones con respecto a los objetivos globales de cada entrada y salida.

Färe et al (1997) presentan un modelo DEA con orientación de salida para la reasignación de un único input fijado y compartido por todas las unidades productivas existentes. Es un modelo demasiado específico ya que supone que la cantidad de dicho input que es utilizada para crear cada salida es conocida. Por su parte, Kumar y Sinha (1999) introducen dos modelos no lineales tipo DEA para un plan de producción multiperiodo. Beasley (2003) presenta también un modelo no lineal tipo DEA, basado en la formulación RATIO, que maximiza la eficiencia media de las DMUs.

Todas las referencias anteriores tratan de solucionar problemas muy específicos y la mayoría resultan modelos demasiado complejos y difíciles de resolver. Recientemente, Lozano y Villa (2004) han propuesto una metodología general para la reasignación centralizada de recursos. Se basa en modelos lineales simples en su formulación que proyectan de forma conjunta a las unidades sobre la frontera eficiente, al mismo tiempo que se optimiza el total de consumo de las entradas (orientación de entrada) o el total de producción de las salidas (caso de orientación de salida). Una aplicación de dichos modelos puede encontrarse en Lozano et al. (2004). En ellos nos basaremos para desarrollar la aplicación que en este artículo se propone.

Como muestra, se desarrolla el modelo con rendimientos a escala variable y orientación de salida en su forma envolvente. Por tanto, sea:

n	número de DMUs.
m	número de entradas.
p	número de salidas.
j,r	índices para las DMUs.
i	índice para las entradas.
k	índice para las salidas.
x_{ij}	cantidad de entrada i consumida por DMU_j.
y_{kj}	cantidad de salida k producida por DMU_j.
γ	amplificación radial del vector del total de entradas.
$(\lambda_{1r},\lambda_{2r},\ldots,\lambda_{nr})$	vector para la proyección del municipio r.

El modelo que resuelve el problema planteado tiene como primera fase:

(Fase I)

$$
\begin{array}{l}
\underset{\lambda_{jr}\ \gamma}{Maximizar}\quad \gamma \\
\text{s.a.} \\
\sum_{r=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_{jr}\,x_{ij} \le \sum_{r=1}^{n} x_{ir} \qquad \forall i \\
\sum_{r=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_{jr}\,y_{kj} \ge \gamma\sum_{r=1}^{n} y_{kr} \qquad \forall k \\
\sum_{j=1}^{n}\lambda_{jr} = 1 \qquad \forall r \\
\lambda_{jr} \ge 0 \quad \gamma \text{ libre}
\end{array}
\tag{1}
$$

Es un problema lineal que posee n^2+1 variables (λ_{jr} y γ) y m+p+n restricciones. El primer grupo de restricciones, para cada recurso considerado, establece que la cantidad total de dicho recurso que se consume en la solución que se adopta (parte izquierda) nunca debe superar el consumo total de recurso en la disposición de partida (parte derecha). Por otra parte, el segundo grupo de restricciones obliga a la solución que se adopte que aumente la producción de cada salida en una proporción γ que es maximizada en la función objetivo. La última restricción indica que dichos puntos de operación serán los que queden contenidos en el conjunto formado por la combinación lineal convexa de las unidades existentes (tecnología VRS).

Debido a que esta fase no asegura que la comparación se realice sobre DMUs eficientes, se resuelve una segunda fase. Denotando a γ^* como el valor óptimo de la variable correspondiente a la amplificación radial del total de salidas obtenida en la primera fase, y definiendo las siguientes variables:

s_i reducción adicional del total de entrada i.

t_k amplificación adicional del total de salida k.

La segunda fase queda de la siguiente forma:

(Fase II)

$$
\begin{array}{l}
\underset{\lambda_{jr}\ s_i\ t_k}{Maximizar}\quad \sum_{i=1}^{m} s_i + \sum_{k=1}^{p} t_k \\
\text{s.a.} \\
\sum_{r=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_{jr}\,x_{ij} = \sum_{r=1}^{n} x_{ir} - s_i \qquad \forall i \\
\sum_{r=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_{jr}\,y_{kj} = \gamma^*\sum_{r=1}^{n} y_{kr} + t_k \qquad \forall k \\
\sum_{j=1}^{n}\lambda_{jr} = 1 \qquad \forall r \\
\lambda_{jr}, s_i, t_k \ge 0
\end{array}
\tag{2}
$$

De nuevo es un problema lineal que posee esta vez n^2+m+p variables (λ_{jr}, s_i y t_k) y m+p+n restricciones. En esta segunda fase se pretende apurar en lo posible el total de las entradas y salidas, habiendo amplificado lo más posible la producción total de salidas de forma equiproporcional en la primera fase. Así se asegura que los puntos de operación a los que tienden cada una de las unidades productivas del problema son eficientes.

Una vez resueltas ambas fases, se puede calcular con qué unidades eficientes debe compararse cada DMU incluida en el problema utilizando los valores óptimos λ^*_{jr} del vector de proyección proporcionado por la segunda fase del modelo:

$$x^*_{ir} = \sum_{j=1}^{n} \lambda^*_{jr} x_{ij} \qquad y^*_{kr} = \sum_{j=1}^{n} \lambda^*_{jr} y_{kj} \tag{3}$$

3. MODELO DE REASIGNACIÓN CENTRALIZADA DE RECURSOS PROPUESTO PARA EL PROBLEMA DEL RECICLAJE DE VIDRIO EN EL PRINCIPADO DE ASTURIAS

El primer paso a seguir a la hora de plantear el problema DEA consiste en identificar las unidades productivas, sus entradas y sus salidas. Evidentemente las unidades productivas serán los municipios. Las entradas consistirán en la población de cada municipio así como el número de bares y restaurantes que posee, como principales generadores de reciclaje de vidrio. Por supuesto, ambos recursos van a ser considerados no discrecionales, ya que no son objeto de posibles modificaciones por parte de la unidad productiva. La única entrada que va a poder ser modificada será el número de contenedores de vidrio que posee el municipio en cuestión. Por otro lado, sólo se considerará una única salida consistente en la cantidad de vidrio reciclado por cada municipio. Para que las unidades puedan ser estudiadas bajo el enfoque DEA, hay que realizar la suposición de que los municipios poseen unos bares y restaurantes que tienen las mismas características de operación en media.

El modelo específico a elegir vendrá determinado por la tecnología y la orientación que el problema posea. En este caso, y debido a las posibles diferencias de tamaño entre los municipios, parece prudente considerar que el problema posee rendimientos a escala variables, ya que se observan apreciables diferencias en los tamaños de los municipios. Como ejemplo, bastaría con comparar la magnitud de las entradas y salidas de Gijón con las de Sto. Adriano.

El modelo que se adopta para la resolución del problema planteado es el de reasignación centralizada de recursos. Es decir, se considera que una entidad de nivel superior, la administración regional en este caso, es capaz de reasignar los recursos existentes (contenedores) de forma que, desde un punto de vista global, se consiga una mayor eficiencia conjunta. Para los otros dos recursos que se proponen (población y número de establecimientos de restauración en el municipio), se utilizarán las restricciones convencionales de no empeoramiento de dichas entradas para ninguna de las unidades.

Se considerará una orientación de salida a la hora de proyectar los municipios sobre la frontera eficiente, ya que así se permite realizar una reasignación del total de contenedores disponibles, con la finalidad de intentar aumentar en lo posible la cantidad total de vidrio reciclada en todos los municipios. A continuación se procede a formular el modelo que se va a utilizar. Usando la notación del anterior apartado, y siendo:

i=1,2,3 índice para las entradas (1=nº de contenedores, 2=población, 3=nº de bares).

s_1 holgura del total de contenedores utilizados.

El modelo que resuelve el problema planteado tiene como primera fase:

(Fase I)

$$\begin{aligned}
&\underset{\lambda_{jr}\,\gamma}{\textit{Maximizar}} \quad \gamma \\
&\text{s.a.} \\
&\sum_{r=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_{jr}\,x_{1j} \le \sum_{r=1}^{n}x_{1r} \\
&\sum_{j=1}^{n}\lambda_{jr}\,x_{ij} \le x_{ir} \qquad i=2,3 \quad \forall r \\
&\sum_{r=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_{jr}\,y_{j} \ge \gamma\sum_{r=1}^{n}y_{r} \\
&\sum_{j=1}^{n}\lambda_{jr} = 1 \qquad \forall r \\
&\lambda_{jr} \ge 0 \quad \gamma\ \textit{libre}
\end{aligned} \tag{4}$$

Como puede observarse, la primera fase consiste en un problema lineal que posee n^2+1 variables (λ_{jr} y γ) y 2n+2 restricciones. Para comprobar que el modelo soluciona el problema centralizado que ha sido planteado, se analizan a continuación cada una de las restricciones presentes.

La primera restricción indica que el número de contenedores existentes en la totalidad de los municipios obtenidos por la solución, no debe exceder la cantidad total inicial disponible. Esto asegura que el modelo busque una solución que proceda a reasignar de una forma centralizada los contenedores con el criterio de maximizar la amplificación del total de vidrio reciclado. El segundo conjunto de restricciones referentes a los dos recursos restantes (población y número de bares del municipio), es el que establece el carácter de híbrido tradicional-centralizado del modelo presentado, ya que se exige que la cantidad de estas entradas no supere la inicial para cada uno de los municipios. Dicho de otra forma, no se está obteniendo una visión centralizada en dichos recursos. Por otra parte, la restricción correspondiente a la salida, cantidad de vidrio reciclado, proporciona el factor de amplificación γ del total de vidrio reciclado. La última restricción obliga a que las posibles soluciones que puedan ser adoptadas pertenezcan a una tecnología de rendimientos a escala variables.

En definitiva, la primera fase del modelo calcula la máxima expansión que puede obtenerse del total de las salidas. Denotando como γ^* al óptimo del modelo anterior, la segunda fase del modelo se puede formular de la siguiente manera:

(Fase II)

$$\begin{aligned}
&\underset{\lambda_{jr},\, s_1}{Maximizar} \quad s_1 \\
&\text{s.a.} \\
&\sum_{r=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_{jr}\, x_{1j} = \sum_{r=1}^{n} x_{1r} - s_1 \\
&\sum_{j=1}^{n} \lambda_{jr}\, x_{ij} \le x_{ir} \qquad i = 2,3 \quad \forall r \\
&\sum_{r=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_{jr}\, y_j = \gamma^* \sum_{r=1}^{n} y_r \\
&\sum_{j=1}^{n} \lambda_{jr} = 1 \qquad \forall r \\
&\lambda_{jr},\ s_1 \ge 0
\end{aligned} \tag{5}$$

Es un modelo lineal con n^2+1 variables (λ_{jr} y s_1) y $2n+2$ restricciones. En esta fase encuentra las posibles reducciones adicionales de las entradas controlables, esto es, excluyendo las no discrecionales. La restricción referente al número de contenedores (primera restricción) contiene la holgura s_1, que indica el total de recurso que sobra en la solución adoptada. Por otro lado, puede observarse que en el grupo de restricciones referentes a los recursos población y número de bares, al ser ambas entradas no discrecionales, no se les impone ningún tipo de reducción, ya que son recursos que no pueden ser modificados (Banker y Morey, 1986).

Por otra parte, la restricción en la que está implicado el número de kilogramos de vidrio reciclados, no contiene holgura debido a que, como sólo existe una salida en el problema, las amplificaciones se agotan en la primera fase. Finalmente, el último conjunto de restricciones indica de nuevo que el problema opera con rendimientos a escala variable.

En definitiva, este modelo, en su segunda fase, encuentra el valor de los vectores (λ_{1r},λ_{2r},...,λ_{nr}) que minimiza la cantidad total de contenedores manteniendo el nivel máximo de amplificación de la salida que se obtuvo en la fase anterior. Puede demostrarse que este modelo de dos fases proyecta de una forma conjunta a cada una de las unidades sobre la frontera eficiente (Lozano, Villa y Adenso-Díaz, 2004).

El modelo centralizado DEA propuesto corresponde a un problema de programación lineal continua. Esto implica que la solución que se obtiene al proyectar las unidades productivas sobre la frontera eficiente, contendrá entradas y salidas que, en general, no serán enteras. Puesto que una de las entradas es el número de contenedores de los que cada municipio dispondrá, el resultado de un número de contenedores no entero puede generar complicaciones a la hora de proceder a su asignación. Por tanto se hace necesario el diseño de algún procedimiento de redondeo a la hora de solucionar el problema de reasignación centralizada que se ejecute una vez solucionado el modelo centralizado DEA.

Para ello se propone un modelo que realizará un redondeo, a la baja o al alza, según convenga, del número de contenedores obtenido por el modelo centralizado de forma que se obtenga el menor sacrificio posible en las salidas obtenidas en el modelo continuo.

Llamaremos $\hat{x}_{1r}$ al número de contenedores que ha sido asignado por el modelo centralizado DEA a cada municipio (o DMU_r) y a su vez, denotaremos como $\hat{y}_r$ al número de kilogramos de vidrio que se han obtenido como solución en dicho modelo en cada uno de los municipios. Definiendo la siguiente variable binaria:

$$z_{1r} = \begin{cases} 1 & si\ \hat{x}_{1r}\ \text{va a ser redondeado al alza} \\ 0 & si\ \hat{x}_{1r}\ \text{va a ser redondeado a la baja} \end{cases} \tag{6}$$

y haciendo uso del siguiente conjunto:

$$R^I = \{r : \hat{x}_{1r} = [\hat{x}_{1r}]\} \tag{7}$$

cuyos elementos son los municipios a los que se les ha asignado un número entero de contenedores en la fase II, y que, por lo tanto, no necesitan ser redondeados, se presenta el siguiente modelo de programación lineal entera:

$$\begin{aligned} &\underset{\lambda_{jr},\ z_{1r},\ t}{\textit{Minimizar}} \quad t \\ &\text{s.a.} \\ &\qquad \sum_{j=1}^{n} \lambda_{jr}\, x_{1j} = \hat{x}_{1r} \qquad \forall r \in R^I \\ &\qquad \sum_{j=1}^{n} \lambda_{jr}\, x_{1j} = [\hat{x}_{1r}] + z_{1r} \qquad \forall r \notin R^I \\ &\qquad \sum_{r=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_{jr}\, x_{1j} \le \sum_{r=1}^{n} x_{1r} \\ &\qquad \sum_{j=1}^{n} \lambda_{jr}\, x_{ij} \le x_{ir} \qquad i = 2,3 \quad \forall r \\ &\qquad \sum_{r=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_{jr}\, y_j = \sum_{r=1}^{n} \hat{y}_r - t \\ &\qquad \sum_{j=1}^{n} \lambda_{jr} = 1 \qquad \forall r \\ &\qquad \lambda_{jr},\ t \ge 0 \qquad z_{1r} \in \{0,1\} \end{aligned} \tag{8}$$

Este modelo contiene n^2+1 variables continuas (λ_{jr} y t) y n ñ $|R^I|$ variables binarias (z_{1r}, es decir, un número de variables binarias de orden n). Además posee 4n+2 restricciones. Analizándolas, se observa que en el primer grupo, se fija el número de contenedores de las proyecciones de los municipios que en el modelo centralizado obtuvieron un valor entero. Sin embargo, para los restantes municipios (segunda restricción del modelo), se obliga a efectuar un redondeo al alza o a la baja, en función del valor que tome la variable binaria z_{1r} para aquellos municipios cuyas proyecciones no tengan asociado un número entero de contenedores en la segunda fase del modelo de reasignación centralizada. Hay que hacer notar que es necesario incluir la restricción de que el total de contenedores que se asignen en la solución proporcionada no pueda exceder del número de contenedores disponibles en la región (tercera restricción del modelo), ya que al posibilitar un redondeo al alza, dicha condición podría ser violada. Las restricciones referentes a los recursos población y número de bares, (esto es, el cuarto grupo de restricciones), obligan a que cada municipio tenga como máximo la cantidad inicial que poseía para estos recursos. Por último, se observa que la restricción de la cantidad de vidrio reciclado, permite un empeoramiento de la cantidad total reciclada de vidrio obtenida mediante la reasignación centralizada, ya que la variable t es no negativa. El criterio del modelo no es más que minimizar la diferencia entre la salida que se obtuvo en el modelo continuo y la que se obtiene en el presente modelo. Esto obliga a que la pérdida de salida sea lo menor posible, adoptando de esta forma la mejor de las soluciones con números enteros de contenedores.

4. RESULTADOS NUMÉRICOS

A continuación se presentan los resultados obtenidos al resolver el problema planteado en este trabajo mediante el modelo centralizado DEA con un posterior redondeo de los contenedores asignados. Además, se ha resuelto dicho problema mediante la metodología DEA tradicional con el objeto de realizar un análisis comparativo entre el caso en que se realiza una proyección individual de los municipios, y el caso en el que se efectúa una proyección global con el ánimo de reasignar de forma centralizada los recursos disponibles.

Debido a que tanto la fase I como la fase II del modelo centralizado propuesto son, excepto por la posible existencia de soluciones óptimas alternativas, invariantes respecto a las unidades de medida para todas las entradas y salidas, excepto en el número de contenedores[3], para simplificar se han escalado los datos de población,

3. Nótese que las holguras de la población, número de bares y kilogramos de vidrio no intervienen en la función objetivo por las razones indicadas más arriba al comentar el modelo de la Fase II.

número de bares y kilogramos de vidrio recogidos para que sumen 100, (ver Cuadro 1 en Anexo). A su vez, la existencia de posibles soluciones óptimas alternativas no tiene por qué invalidar el que se puedan escalar los datos de la forma que se ha descrito. Ello es debido a que, cuando se obtiene la solución del modelo, los valores "target" asociados a las entradas no discrecionales son sustituidos por sus valores observados actuales, ya que debido a su propia naturaleza, no pueden ser modificados. Hay que hacer notar que la proyección compuesta por los "targets" que el modelo ofrece para las dimensiones discrecionales y por los valores iniciales de las dimensiones no discrecionales es siempre admisible. Por lo tanto, la solución del modelo es única ya que siempre se escoge una (y la misma) de entre las posibles múltiples soluciones óptimas alternativas del modelo.

El modelo DEA tradicional (BCC-O) ha sido resuelto mediante el software EMS 1.3.0 (Efficiency Measurement System), en su versión de uso exclusivamente académico y de distribución gratuita en Internet (http://www.wiso.uni-dortmund.de/lsfg/or/scheel/ems/).

En el Anexo se exponen los resultados de dicho modelo (Cuadro 2). A pesar de conseguir un aumento del 36,3% en el total de vidrio reciclado, es de destacar la disminución en el total de contenedores utilizados en la solución propuesta por el modelo tradicional. En concreto, la solución propuesta sólo aprovecha el 95% del total de contenedores disponibles[4].

Los resultados obtenidos al ejecutarse los tres modelos presentados en el apartado 4 de este artículo se muestran en el Cuadro 3 del Anexo. Tanto en la resolución del modelo centralizado DEA, como en la del modelo de programación lineal entera mixta, se ha utilizado el software XA Linear Optimizer System (http://www.sunsetsoft.com/).

En este caso, como puede observarse de la última fila del Cuadro 3, se produce un aumento del vidrio total reciclado con respecto a la solución del modelo tradicional de proyección individual de las unidades realizado en el anterior apartado (del 36,30% obtenido en el modelo tradicional se ha pasado a un 45,74% en el modelo centralizado DEA). Esto era de esperar, ya que el modelo de reasignación centralizada de recursos intenta maximizar la salida total del problema. Además, puede observarse cómo se utilizan la totalidad de los contenedores disponibles, y que a todos los municipios se les ha asignado en la solución propuesta un número de contenedores entero.

Por otra parte puede observarse que algunos municipios disminuyen su nivel de vidrio reciclado con respecto a la situación inicial (véase el caso de Avilés que pasa

4. Piénsese que la Administración Regional Asturiana ya ha adquirido un total de 2060 contenedores para toda la región, y que, por lo tanto, considerará más apropiada una solución en donde se aprovechen todos.

de 13,49 a 7,20 o de Langreo que pasa de 3,91 a 2,85). Esto se debe al carácter centralizado del modelo. Es admisible que algún municipio obtenga menor salida siempre y cuando haya algún otro que la aumente para que el resultado global (número total de kilogramos de vidrio reciclado en Asturias, en este caso) sea superior al resultado total del que se partía. Por lo tanto, en la solución que se propone, es natural que existan municipios que por la nueva repartición de los contenedores que se ha efectuado vean empeoradas sus expectativas de recogida de vidrio, siempre en pos de la mejora que obtendrán otros que han sido favorecidos en la asignación de los contenedores, y que contribuirán al aumento del número de kilogramos de vidrio recogidos en total en la región asturiana.

Hay que hacer notar que en la solución que adopte el modelo, un descenso de contenedores puede conllevar a un descenso en los demás recursos, i.e. población y número de bares. Aplicar a la realidad estos resultados carecería de sentido. Efectivamente, la inclusión en la formulación tradicional de variables no discrecionales no impide la posibilidad de que el punto de operación teórico donde se proyectarán algunos municipios pase por reducir el número de habitantes y de bares de la población. Por ejemplo, el modelo propone que Avilés reduzca el número de contenedores de 204 a 98, y que asumiendo también una reducción de la población de 8,03 a 4,30, se obtendría una cantidad de vidrio reciclado de 7,20. Evidentemente, como la única reducción realmente aplicable es la del nº de contenedores (y no la de población o nº de bares) eso implica que la utilización media de los contenedores asignados debe aumentar respecto a la de partida pudiendo requerir en algún caso un aumento de la frecuencia de recogida de los mismos. Este hecho debe compensarse, en promedio, con la disminución de la utilización media (y eventualmente de la frecuencia de recogida) de los contenedores de los municipios que ven aumentada su asignación de contenedores.

En cualquier caso, conviene ser conscientes de que los resultados del modelo respecto de la asignación de contenedores no van a ser los definitivos sino más bien son el punto de partida para que los responsables puedan, en una fase posterior, hacer un ajuste fino de los mismos a tenor de consideraciones que, por la naturaleza de la herramienta utilizada, no han podido ser tenidas en cuenta como datos geográficos, sociopolíticos, etc.

5. RESUMEN Y CONCLUSIONES

En este trabajo se ha resuelto mediante un modelo original un problema de reasignación centralizada de recursos. En concreto se ha analizado el caso de la repartición de contenedores de reciclaje de vidrio entre diferentes municipios del Principado de Asturias, de forma que se obtenga la mayor cantidad total de vidrio reciclado. El hecho de que un recurso como los contenedores de vidrio sea controlado por la administración regional, hace que el enfoque de reasignación centralizada sea el idóneo a la hora de resolver el problema.

Se ha presentado una técnica de resolución del problema consistente en tres fases. Las dos primeras corresponden a un par de modelos de programación lineal (amplificación de la salida y reducción de la entrada respectivamente) similares a los modelos DEA tradicionales, pero que proyectan todas las unidades conjuntamente. Al obtenerse ciertas proyecciones con número de contenedores fraccionarios, se introduce una tercera fase que convierte los consumos de dicho recurso en números enteros mediante un modelo de programación lineal entera mixta.

Los resultados globales obtenidos al utilizar el modelo centralizado propuesto en este trabajo, tanto en lo que se refiere a los contenedores, como a la cantidad de vidrio reciclado, son favorables en comparación con los obtenidos con el modelo tradicional. Así, mientras que proyectando individualmente los municipios sobre la frontera eficiente, el modelo tradicional obtiene un aumento del 36,30% en el vidrio reciclado con una utilización del 95% de los contenedores disponibles, con la aplicación del modelo centralizado, el porcentaje de vidrio reciclado se incrementa hasta el 45,83% en una solución que involucra la totalidad de contenedores existentes. En definitiva, el hecho de considerar una nueva repartición de contenedores entre los municipios establece una ventaja de la que carecen los modelos tradicionales, y que se refleja en esta aplicación en aproximadamente un 45% más de kilogramos de vidrio recogidos que en la situación original y cerca del 10% más con respecto al modelo tradicional.

BIBLIOGRAFÍA

ATHANASSOPOULOS, A.D., (1995): "Goal programming & data envelopment analysis (GoDEA) for target-based multi-level planning: Allocating central grants to the Greek local authorities", *European Journal of Operational Research*, 87, pp: 535-550.

ATHANASSOPOULOS, A.D., (1998): "Decision Support for Target-Based Resource Allocation of Public Services in Multiunit and Multilevel Systems", *Management Science*, 44:2, pp: 173-187.

BANKER, R. D., CHARNES, A. Y COOPER, W.W., (1984): "Some Models for Estimating Technical and Scales Inefficiencies in Data Envelopment Analysis", *Management Science*, 30, pp: 1078-1092.

BANKER, R.D. Y MOREY, R., (1986): "Efficiency Analysis for Exogenously Fixed Inputs and Outputs", *Operations Research*, 34:4, pp: 513-521.

BEASLEY, J.E., (2003): "Allocating fixed costs and resources via data envelopment analysis", *European Journal of Operational Research*, 147, pp: 198-216.

CHARNES, A., COOPER, W.W. Y RHODES, E., (1978): "Measuring the efficiency of decision making units", *European Journal of Operational Research*, 2, pp: 429-444.

COOPER, W.W., SEIFORD, L.M. Y TONE, K., (2000): *Data Envelopment Analysis. A Comprehensive Text with Models, Applications, References and DEA-Solver Software*, Kluwer Academic Publishers, Boston, MA.

FÄRE, R., GRABOWSKI, R., GROSSKOPF, S. Y KRAFT, S., (1997): "Efficiency of a fixed but allocatable input: A non-parametric approach", *Economic Letters*, 56, pp: 187-193.

GOLANY, B., PHILLIPS, F.Y., Y ROUSSEAU, J.J., (1993): "Models for improved effectiveness based on DEA efficiency results", *IIE Transactions*, 25:6, pp: 2-10.

GOLANY, B. Y TAMIR, E., (1995): "Evaluating Efficiency-Effectiveness-Equality Trade-offs: A Data Envelopment Analysis Approach", *Management Science*, 41:7, pp: 1172-1184.

KUMAR, C.K. Y SINHA, B.K., (1999): "Efficiency based production planning and control methods", *European Journal of Operational Research*, 117, pp: 450-469.

LOZANO, S. Y VILLA, G., (2004): "Centralised Resource Allocation Using Data Envelopment Analysis", *Journal of Productivity Analysis*, 22:1, pp: 143-161.

LOZANO, S., VILLA, G. Y ADENSO-DÍAZ, B., (2004): "Centralised target setting for regional recycling operations using DEA", *Omega*, 32, pp: 101-110.

ANEXO

CUADRO 1
DATOS ESCALADOS EN POBLACIÓN, BARES Y KILOS DE VIDRIO

MUNICIPIOS (DMU)	CONTENEDORES	POBLACIÓN	BARES	VIDRIO RECICLADO
ALLER	16	1,53	0,66	0,30
AMIEVA	3	0,09	0,57	0,01
AVILES	204	8,03	2,41	13,49
BIMENES	5	0,21	0,26	0,01
BOAL	4	0,25	0,44	0,01
CABRALES	5	0,22	2,98	0,01
CANDAMO	3	0,25	0,18	0,06
CANGAS DE NARCEA	20	1,70	2,06	0,35
CANGAS DE ONIS	8	0,59	4,56	0,14
CARAVIA	3	0,05	0,31	0,01
CARREÑO	29	0,99	1,40	1,18
CASTRILLÓN	39	2,10	1,80	1,49
CASTROPOL	6	0,43	1,14	0,11
COAÑA	11	0,36	0,48	0,06
COLUNGA	6	0,44	1,01	0,01
CORVERA	52	1,55	0,48	1,60
CUDILLERO	15	0,58	2,63	0,38
DEGAÑA	7	0,15	0,04	0,01
FRANCO, EL	9	0,39	0,48	0,20
GIJON	557	24,79	14,26	41,64
GRADO	23	1,13	0,88	0,51
IBIAS	9	0,22	0,18	0,02
ILLAS	4	0,12	0,00	0,15
LANGREO	101	4,74	0,92	3,91
LAVIANA	39	1,41	0,75	0,79
LENA	20	1,34	1,14	0,61
VALDES	48	1,51	3,11	1,12
LLANERA	57	1,07	0,88	1,30
LLANES	32	1,24	8,78	0,71
MIERES	93	4,82	2,02	2,24
MORCIN	10	0,28	0,04	0,16
MUROS DE NALON	13	0,23	0,22	0,11
NAVA	7	0,53	1,23	0,26
NAVIA	28	0,86	1,27	1,15
NOREÑA	18	0,39	0,26	0,95
ONIS	3	0,09	0,48	0,04
OVIEDO	160	18,76	12,81	14,91
PARRES	11	0,52	1,14	0,24

Continúa...

CUADRO 1
DATOS ESCALADOS EN POBLACIÓN, BARES Y KILOS DE VIDRIO
(Conclusión)

MUNICIPIOS (DMU)	CONTENEDORES	POBLACIÓN	BARES	VIDRIO RECICLADO
PEÑAMELLERA ALTA	3	0,07	0,92	0,03
PEÑAMELLERA BAJA	2	0,16	0,79	0,02
PILOÑA	12	0,86	3,29	0,22
PONGA	4	0,07	0,66	0,03
PRAVIA	14	0,91	1,05	0,35
PROAZA	3	0,09	0,09	0,01
REGUERAS, LA	5	0,21	0,26	0,14
RIBADEDEVA	3	0,18	0,79	0,06
RIBADESELLA	11	0,59	3,11	0,48
RIBERA DE ARRIBA	17	0,20	0,09	0,32
RIOSA	6	0,25	0,26	0,19
SALAS	11	0,70	1,01	0,32
S. MARTIN DEL REY AURELIO	38	2,08	0,31	1,01
S. TIRSO DE ABRES	3	0,06	0,13	0,01
STO. ADRIANO	2	0,03	0,04	0,01
SARIEGO	2	0,14	0,04	0,02
SIERO	129	4,34	3,33	3,96
SOTO DEL BARCO	4	0,42	0,48	0,07
TAPIA DE CASARIEGO	18	0,42	0,61	0,22
TARAMUNDI	7	0,09	0,66	0,01
TINEO	17	1,27	1,32	0,24
VEGADEO	15	0,47	0,53	0,43
VILLAVICIOSA	28	1,36	4,13	0,59
SUMA	**2060**	**100,00**	**100,00**	**100,00**

Fuente: Elaboración propia.

CUADRO 2
RESULTADOS PROPORCIONADOS POR EL MODELO BCC-O

MUNICIPIOS (DMU)	CONTENEDORES	POBLACIÓN	BARES	VIDRIO RECICLADO
ALLER	16	1,11	0,66	1,17
AMIEVA	3	0,09	0,04	0,08
AVILES	204	8,03	2,41	13,49
BIMENES	5	0,21	0,07	0,24
BOAL	4	0,25	0,18	0,19
CABRALES	5	0,22	0,07	0,24
CANDAMO	3	0,25	0,12	0,11
CANGAS DE NARCEA	20	1,69	1,07	1,58

Continúa...

CUADRO 2

RESULTADOS PROPORCIONADOS POR EL MODELO BCC-O

MUNICIPIOS (DMU)	CONTENEDORES	POBLACIÓN	BARES	VIDRIO RECICLADO
CANGAS DE ONIS	8	0,59	0,33	0,53
CARAVIA	2,91	0,05	0,06	0,06
CARREÑO	29	0,99	0,58	1,85
CASTRILLÓN	39	2,10	1,22	2,89
CASTROPOL	6	0,43	0,26	0,36
COAÑA	11	0,36	0,16	0,63
COLUNGA	6	0,44	0,28	0,36
CORVERA	41,97	1,55	0,48	2,65
CUDILLERO	15	0,58	0,28	0,96
DEGAÑA	5,96	0,15	0,04	0,26
FRANCO, EL	9	0,39	0,17	0,54
GIJON	557	24,79	14,26	41,64
GOZON	28	1,07	0,59	1,87
GRADO	23	1,13	0,62	1,62
IBIAS	9	0,22	0,09	0,44
ILLAS	4	0,11	0	0,15
LANGREO	80,36	3,14	0,92	5,25
LAVIANA	39	1,41	0,75	2,56
LENA	20	1,34	0,80	1,49
VALDES	42,58	1,51	0,90	2,81
LLANERA	32,92	1,07	0,65	2,08
LLANES	32	1,24	0,69	2,16
MIERES	93	3,99	2,02	6,66
MORCIN	7,64	0,26	0,04	0,39
MUROS DE NALON	10,89	0,23	0,17	0,53
NAVA	7	0,53	0,32	0,45
NAVIA	28	0,86	0,53	1,71
NOREÑA	18	0,39	0,26	0,95
ONIS	3	0,09	0,04	0,08
OVIEDO	160	18,75	12,81	14,91
PARRES	11	0,52	0,25	0,70
PEÑAMELLERA ALTA	3	0,07	0,02	0,08
PEÑAMELLERA BAJA	2	0,16	0,79	0,02
PILOÑA	12	0,86	0,50	0,86
PONGA	3,79	0,07	0,07	0,11
PRAVIA	14	0,91	0,52	0,99
PROAZA	3	0,09	0,04	0,08
REGUERAS, LA	5	0,21	0,07	0,24
RIBADEDEVA	3	0,18	0,12	0,10

Continúa...

CUADRO 2

RESULTADOS PROPORCIONADOS POR EL MODELO BCC-O

(Conclusión)

MUNICIPIOS (DMU)	CONTENEDORES	POBLACIÓN	BARES	VIDRIO RECICLADO
RIBADESELLA	11	0,59	0,30	0,72
RIBERA DE ARRIBA	8,27	0,20	0,09	0,39
RIOSA	6	0,25	0,09	0,31
SALAS	11	0,69	0,38	0,75
S. MARTIN DEL REY AURELIO	29,46	1,12	0,31	1,85
S. TIRSO DE ABRES	3	0,06	0,04	0,07
STO. ADRIANO	2	0,03	0,04	0,00
SARIEGO	2	0,14	0,04	0,02
SIERO	105,23	4,34	2,53	7,54
SOTO DEL BARCO	4	0,38	0,48	0,21
TAPIA DE CASARIEGO	18	0,42	0,27	0,97
TARAMUNDI	4,57	0,09	0,08	0,15
TINEO	17	1,27	0,77	1,28
VEGADEO	15	0,47	0,25	0,88
VILLAVICIOSA	28	1,36	0,75	1,99
SUMA	**1950,56**	**96,13**	**53,74**	**136,30**

Fuente: Elaboración propia.

CUADRO 3

RESULTADOS PROPORCIONADOS POR EL MODELO CENTRALIZADO DEA

MUNICIPIOS (DMU)	CONTENEDORES	POBLACIÓN	BARES	VIDRIO RECICLADO
ALLER	30	1,27	0,66	2,10
AMIEVA	3	0,09	0,04	0,08
AVILES	98	4,30	2,41	7,20
BIMENES	6	0,21	0,06	0,31
BOAL	7	0,25	0,08	0,38
CABRALES	6	0,22	0,07	0,31
CANDAMO	7	0,25	0,08	0,38
CANGAS DE NARCEA	18	1,70	1,08	1,45
CANGAS DE ONIS	14	0,59	0,28	0,91
CARAVIA	2	0,05	0,04	0,01
CARREÑO	23	0,99	0,51	1,58
CASTRILLÓN	48	2,10	1,15	3,46
CASTROPOL	11	0,43	0,18	0,68
COAÑA	8	0,36	0,15	0,47

Continúa...

CUADRO 3
RESULTADOS PROPORCIONADOS POR EL MODELO CENTRALIZADO DEA

MUNICIPIOS (DMU)	CONTENEDORES	POBLACIÓN	BARES	VIDRIO RECICLADO
COLUNGA	11	0,44	0,19	0,68
CORVERA	23	0,96	0,48	1,57
CUDILLERO	14	0,58	0,27	0,91
DEGAÑA	5	0,15	0,02	0,22
FRANCO, EL	10	0,39	0,16	0,61
GIJON	557	24,79	14,26	41,64
GOZON	25	1,07	0,56	1,73
GRADO	27	1,13	0,59	1,87
IBIAS	5	0,22	0,07	0,24
ILLAS	4	0,11	0,00	0,15
LANGREO	40	1,72	0,92	2,85
LAVIANA	33	1,41	0,75	2,33
LENA	31	1,34	0,71	2,18
VALDES	35	1,51	0,81	2,48
LLANERA	25	1,07	0,55	1,73
LLANES	29	1,24	0,65	2,03
MIERES	83	3,63	2,02	6,07
MORCIN	6	0,20	0,04	0,30
MUROS DE NALON	7	0,23	0,07	0,37
NAVA	13	0,53	0,24	0,83
NAVIA	21	0,86	0,43	1,42
NOREÑA	10	0,39	0,16	0,61
ONIS	3	0,09	0,04	0,08
OVIEDO	422	18,75	10,78	31,51
PARRES	13	0,52	0,24	0,83
PEÑAMELLERA ALTA	3	0,07	0,02	0,08
PEÑAMELLERA BAJA	5	0,16	0,03	0,23
PILOÑA	21	0,86	0,44	1,42
PONGA	3	0,07	0,02	0,08
PRAVIA	22	0,91	0,46	1,50
PROAZA	3	0,09	0,04	0,08
REGUERAS, LA	6	0,21	0,06	0,30
RIBADEDEVA	5	0,18	0,04	0,23
RIBADESELLA	15	0,59	0,28	0,97
RIBERA DE ARRIBA	5	0,20	0,05	0,24
RIOSA	7	0,25	0,08	0,38
SALAS	9	0,70	0,40	0,62

Continúa...

CUADRO 3

RESULTADOS PROPORCIONADOS POR EL MODELO CENTRALIZADO DEA

(Conclusión)

MUNICIPIOS (DMU)	CONTENEDORES	POBLACIÓN	BARES	VIDRIO RECICLADO
S. MARTIN DEL REY AURELIO	16	0,65	0,31	1,05
S. TIRSO DE ABRES	3	0,06	0,04	0,07
STO. ADRIANO	2	0,03	0,04	0,00
SARIEGO	4	0,14	0,03	0,16
SIERO	99	4,34	2,45	7,27
SOTO DEL BARCO	11	0,42	0,18	0,67
TAPIA DE CASARIEGO	11	0,42	0,18	0,67
TARAMUNDI	3	0,09	0,04	0,08
TINEO	30	1,27	0,67	2,10
VEGADEO	12	0,47	0,21	0,75
VILLAVICIOSA	32	1,36	0,72	2,25
SUMA	**2060**	**89,70**	**48,61**	**145,74**

Fuente: Elaboración propia.